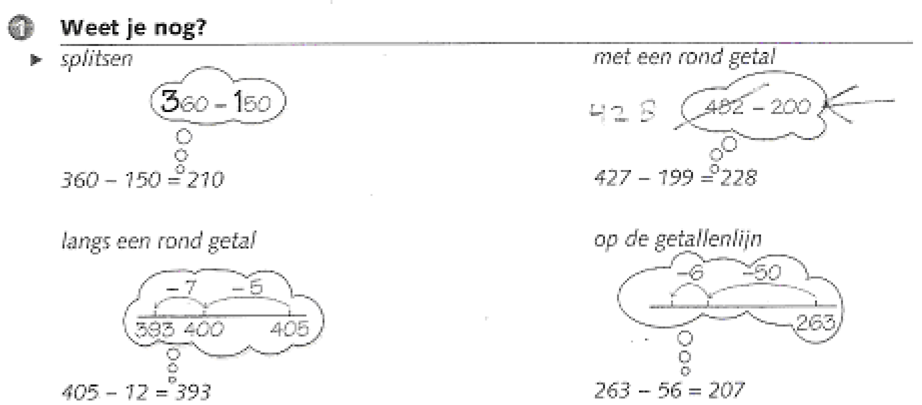
REKENEN?

> 'Uit onderzoek van het CITO (2006) blijkt dat ruim de helft van de eerstejaars Pabo-studenten slechter rekent dan de beste leerlingen uit groep 8.'

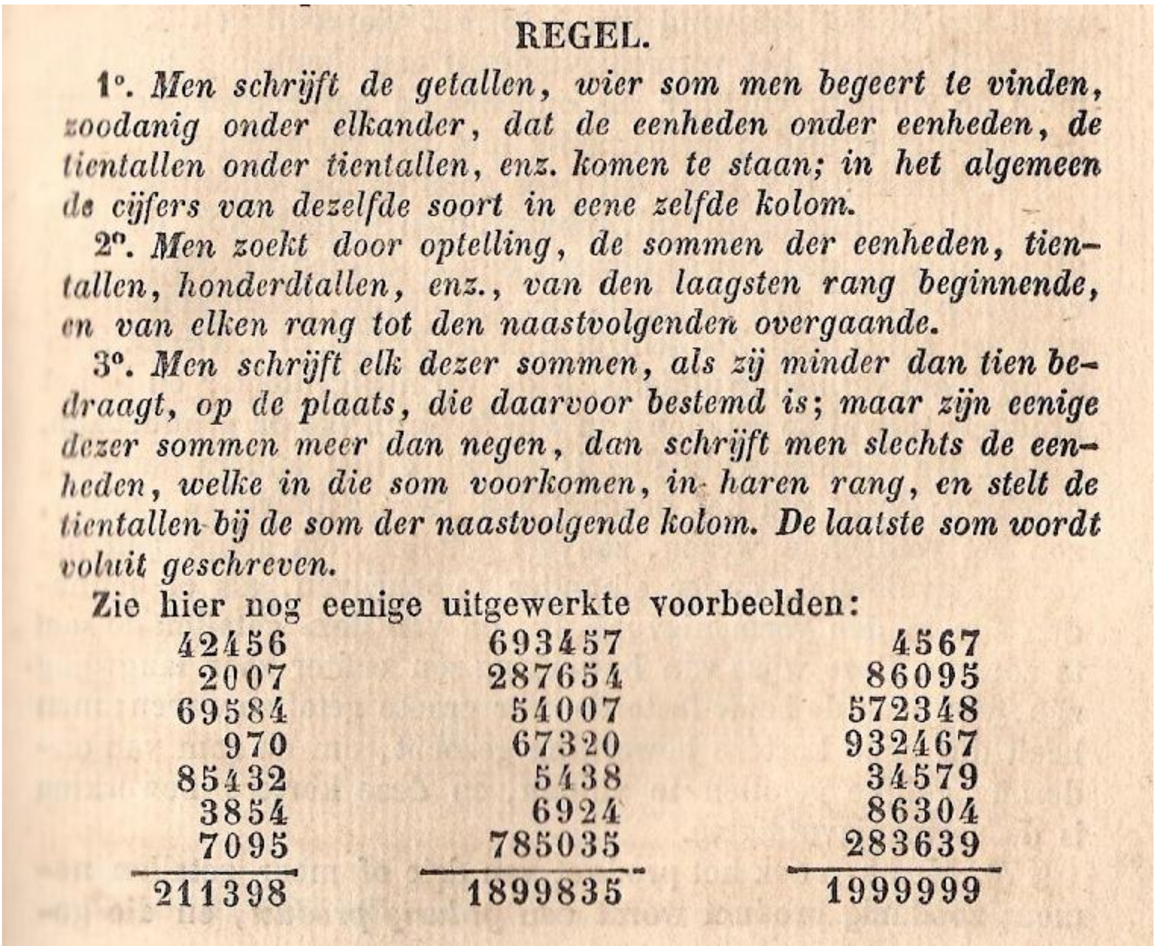
Die ruime 'helft van de eerstejaars Pabo-studenten' heeft ooit ook in groep 8 van de basisschool gezeten. Behoorden zij toen al niet tot de beste leerlingen? Of zijn hun rekenvaardigheden niet beklijfd? Wat waren die rekenvaardigheden dan wel? Zijn die anders dan wat indertijd op de 'lagere school' werd geleerd?

De laatste drie vragen zijn het belangrijkste. Er is een groot verschil tussen de technieken die vandaag de dag in het rekenonderwijs worden aangeleerd en de technieken van 'vroeger'. 'Vandaag de dag' is de tijd dat leerlingen in groep 8 van de basisschool een rekentoets afleggen die voornamelijk bestaat uit ingeklede vraagstukken die bij goed lezen leiden tot sommetjes die uit het hoofd moeten worden opgelost. Hoewel dit geen 'doel' van het rekenonderwijs hoeft te zijn, wordt het toch wel zo gezien, met name door voorstanders van 'realistisch rekenen'. Het is ook de tijd dat zelfbenoemde onderwijskundigen verschillende manieren bedacht hebben om één type opgaven te kunnen maken. Dit blijkt uit het volgende voorbeeld. Hoe een basisscholier en zijn docent hier mee kunnen omgaan, zal tegen het einde van dit betoog worden getoond.



'Vroeger' is de tijd dat het doel van het rekenonderwijs op de lagere school primair het 'op papier' kunnen uitvoeren van 'complexe' berekeningen was. Zogenaamde ingeklede vergelijkingen kwamen pas aan de orde als zulke berekeningen geen problemen meer opleverden. Om het laatste te bewerkstelligen moesten alleen de bewerkingen die daarbij 'uit het hoofd' moeten kunnen worden gedaan, geconditioneerde rekenreflexen zijn geworden.

Om welke bewerkingen het ging, is betrekkelijk eenvoudig af te leiden uit voorbeelden van zulke berekeningen. Hiervoor hoeven we alleen maar een negentiende-eeuws boek als de *Beginselen der cijferkunst* van H. Strootman te bekijken. Dit bevat na elke behandeling van een rekenkundige bewerking zowel een formulering van de bijbehorende regel als duidelijke voorbeelden. Omdat de indruk bestaat dat niet alle onderwijskundigen van tegenwoordig op de hoogte zijn van de aanpak van de onderwijzers van vroeger volgen hier letterlijke citaten uit het genoemde boek, te beginnen met de regel voor complexe optellingen en de daarbij aansluitende voorbeelden:



REGEL.

1°. *Men schrijft de getallen, wier som men begeert te vinden, zoodanig onder elkander, dat de eenheden onder eenheden, de tientallen onder tientallen, enz. komen te staan; in het algemeen de cijfers van dezelfde soort in eene zelfde kolom.*

2°. *Men zoekt door optelling, de sommen der eenheden, tientallen, honderdtallen, enz., van den laagsten rang beginnende, en van elken rang tot den naastvolgenden overgaande.*

3°. *Men schrijft elk dezer sommen, als zij minder dan tien bedraagt, op de plaats, die daarvoor bestemd is; maar zijn eenige dezer sommen meer dan negen, dan schrijft men slechts de eenheden, welke in die som voorkomen, in haren rang, en stelt de tientallen bij de som der naastvolgende kolom. De laatste som wordt voluit geschreven.*

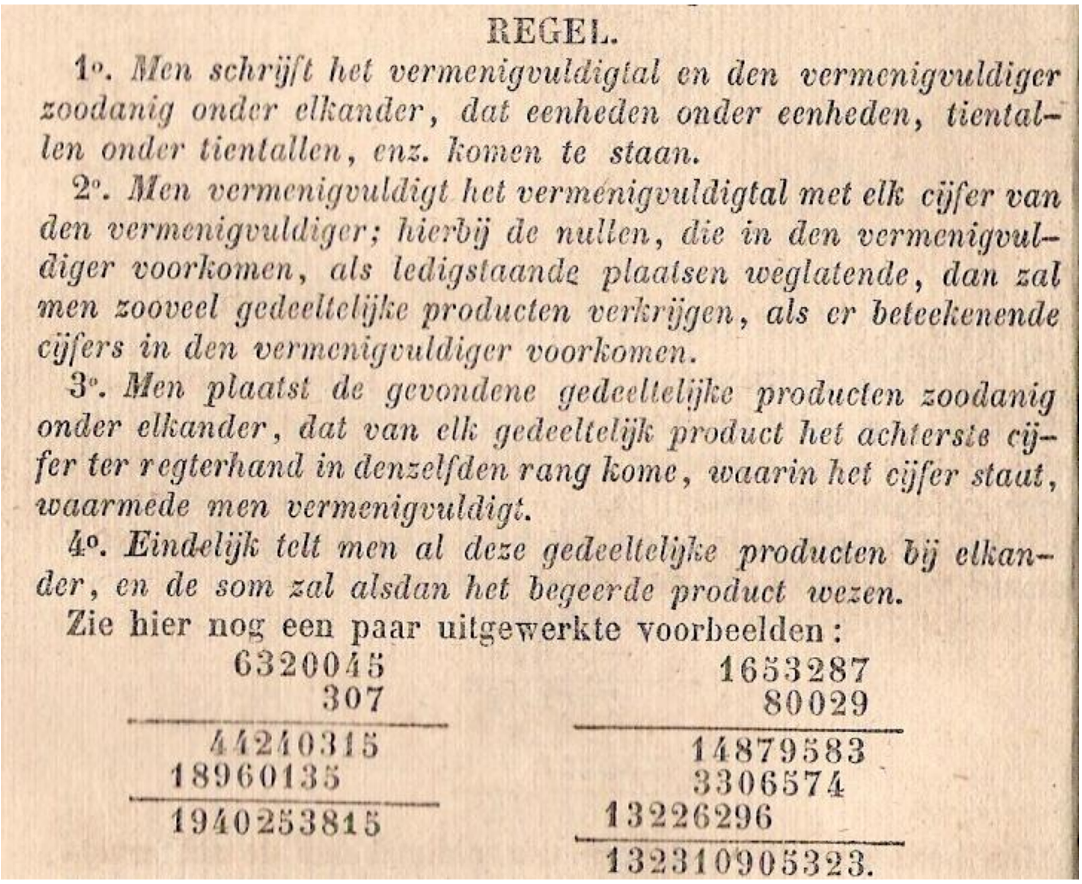
Zie hier nog eenige uitgewerkte voorbeelden:

42456	693457	4567
2007	287654	86095
69584	54007	572348
970	67320	932467
85432	5438	34579
3854	6924	86304
7095	785035	283639
211398	1899835	1999999

Op voorlopers van de Pabo, dus de normaalschool of de kweekschool, kregen de leerlingen daarbij de ‘negenproef’ aangereikt. Zij konden dit controlemiddel op hun beurt weer overdragen aan hun leerlingen. Maar in ieder geval leerden zij aan hen dat het ook nuttig kan zijn het resultaat van een optelling te controleren door deze vervolgens ‘van beneden naar boven’ uit te voeren.

Let wel, het werd voor de praktijk, bijvoorbeeld in de bouw, niet nodig geacht een berekening als 87 + 39 uit het hoofd te kunnen uitvoeren. De op te tellen getallen werden daar immers al op een bepaalde achtergrond opgeschreven wanneer zij het resultaat waren van afzonderlijke metingen. Bovendien was het niet wenselijk die getallen te moeten onthouden, omdat niet iedereen een daartoe toereikend geheugen heeft. Hetzelfde geldt voor hun som – dus die moest ook schriftelijk worden vastgelegd.

Na de optelling kwam de vermenigvuldiging.. Hier hoeft na het voorafgaande weinig meer over te worden gezegd, vandaar dat hier meteen de regel volgt:



REGEL.

1°. *Men schrijft het vermenigvuldigtal en den vermenigvuldiger zoodanig onder elkander, dat eenheden onder eenheden, tientallen onder tientallen, enz. komen te staan.*

2°. *Men vermenigvuldigt het vermenigvuldigtal met elk cijfer van den vermenigvuldiger; hierbij de nullen, die in den vermenigvuldiger voorkomen, als ledigstaande plaatsen weglatende, dan zal men zooveel gedeeltelijke producten verkrijgen, als er beteekenende cijfers in den vermenigvuldiger voorkomen.*

3°. *Men plaatst de gevondene gedeeltelijke producten zoodanig onder elkander, dat van elk gedeeltelijk product het achterste cijfer ter regterhand in denzelfden rang kome, waarin het cijfer staat, waarmede men vermenigvuldigt.*

4°. *Eindelijk telt men al deze gedeeltelijke producten bij elkander, en de som zal alsdan het begeerde product wezen.*

Zie hier nog een paar uitgewerkte voorbeelden:

```
   6320045          1653287
       307            80029
 ---------      -----------
  44240315         14879583
 18960135          3306574
 ---------      13226296
1940253815      -----------
                132310905323.
```

Het is nu van het grootste belang dat het produkt van twee getallen onder de tien ‘automatisch’ kan worden geproduceerd. Op de stimulus ‘zeven keer acht’ moet onmiddellijk de respons ‘zesenvijftig’ volgen.

Aftrekkingen zoals het verschil van 87 en 39 uitrekenen, gaan uit het hoofd nog minder gemakkelijk dan optellingen, dus daar is het helemaal op zijn plaats om ze uit te schrijven:

REGEL.

1°. *Men schrijft het kleinste getal onder het grootste, zoodanig, dat de eenheden onder eenheden, de tientallen onder tientallen, enz. komen te staan.*

2°. *Men trekt, van de eenheden af te beginnen, en van cijfer tot cijfer voortgaande, elk onderste cijfer van het bovenste af, en plaatst het verschil onder de getallen, in den rang waartoe het behoort.*

3°. *Wanneer het bovenste cijfer kleiner dan het onderste cijfer is, verhoogt men dit bovenste cijfer met* 10, *en trekt het onderste van de som af, in welk geval men het naastvolgende bovenste cijfer één minder neemt.*

4°. *Wanneer men het volgend cijfer met één moet verminderen, en dit cijfer eene nul is, of wel eenige volgende cijfers nullen zijn, dan verandert men in de gedachte die nul of nullen in een negen of negens, neemt het eerstvolgende cijfer, dat eene waarde heeft, één minder, en verrigt voorts de aftrekking naar den regel.*

Zie hier nog eenige uitgewerkte voorbeelden:

6300702	10807060	23000000
1346895	5040704	786549
4953807	5766356	22213451.

Tenslotte de staartdelingen. De regel is ietwat gecompliceerder dan de vorige, omdat zulke delingen niet ‘op 0’ hoeven uit te komen:

REGEL.

1°. *Men plaatst den deeler vóór het deeltal, met eene afscheiding tusschen beide; achter het deeltal zet men insgelijks eene afscheiding, om daarachter het quotiënt te plaatsen.*

2°. *Men ziet uit hoeveel cijfers de deeler bestaat, neemt even zooveel cijfers van het deeltal, bij den hoogsten rang der cijfers te beginnen, en bepaalt, bij begrooting, hoeveelmaal de deeler op dit afgezonderde gedeelte van het deeltal begrepen is. Is echter dit afgezonderde gedeelte van het deeltal kleiner dan de deeler, dan neemt men daarbij nog het volgend cijfer uit het deeltal.*

3°. *Men schrijft het getal, dat aantoont, hoe menigmaal de deeler op dit gedeeltelijke deeltal begrepen is, op de plaats van het quotiënt, en vermenigvuldigt den deeler met dit gevonden getal; is echter dit product grooter dan het afgezonderde gedeelte des deeltals, dan blijkt daaruit, dat het quotiënt te groot genomen is, en dan neemt men het quotiënt één minder, tot zoolang, dat het product van het quotiënt met den deeler, zoo groot of kleiner is, dan het afgezonderde gedeelte des deeltals.*

4°. *Men trekt het gevonden product af van het afgezonderde gedeelte des deeltals, welke rest altijd minder dan de deeler moet zijn, en plaats achter deze rest het volgend cijfer van het deeltal.*

5°. *Men bepaalt weder hoeveelmaal de deeler in dit gedeeltelijke deeltal begrepen is, en handelt vervolgens even als in 3° en 4° gezegd is.*

6°. *Als het volgend cijfer van het deeltal achter eene verkregene rest geplaatst is, en de deeler grooter is dan dit nieuwe gedeelte des deeltals, dan stelt men in de plaats van het quotiënt eene nul voegt achter deze rest nog het volgend cijfer van het deeltal, en handelt weder even als voren.*

7°. *Men gaat op deze wijze voort, tot dat men het laatste cijfer van het deeltal gebruikt heeft; schrijvende elk nieuw gevonden deel van het quotiënt achter het eerste verkregene. Blijft er eindelijk eene rest over, dan vormt men uit deze rest en den deeler, de breuk, die nog eene gedeelte van het quotiënt uitmaakt.*

Zie hier nog een paar uitgewerkte voorbeelden:

```
36|10872180|302005          5849|1900943|325 18/5849.
  |108     |                    |17547  |
  -----                         ------
    72                             14624
    72                             11698
    ----                           -----
     180                            29263
     180                            29245
     ---                            -----
       0.                              18.
```

Tegenwoordig wordt wel schamper gedaan over staartdelingen, terwijl deze nu juist ideale oefeningen in vermenigvuldigen en aftrekken opleveren. Bovendien was het zeker aanvankelijk van belang dat de delingen op 0 uitkwamen, want dat gaf de leerlingen niet alleen het vertrouwen dat zij het goed gedaan hadden, maar ook ‘een prettig gevoel’.

Het was voor de onderwijzers natuurlijk gemakkelijk om delingen op te stellen die zo goed uitkomen. Zij hoefden daarvoor alleen maar eerst een vermenigvuldiging te maken, bijvoorbeeld 648 x 93457 = 60560136. Hier kon de opgave 60560136 : 93457 uit worden afgeleid, met het volgende resultaat

```
93457 |60560136|648
      |560742  |
      ----------
        448593
        373828
       --------
         747656
         747656
        --------
              0.
```

Voor gevorderde lagere-schoolleerlingen ontstonden zulke prachtige opgaven zelfs na vermenigvuldigingen en een aftrekking, bijvoorbeeld:

$$\frac{6789 \times 6789 - 2345 \times 2345}{9134}$$

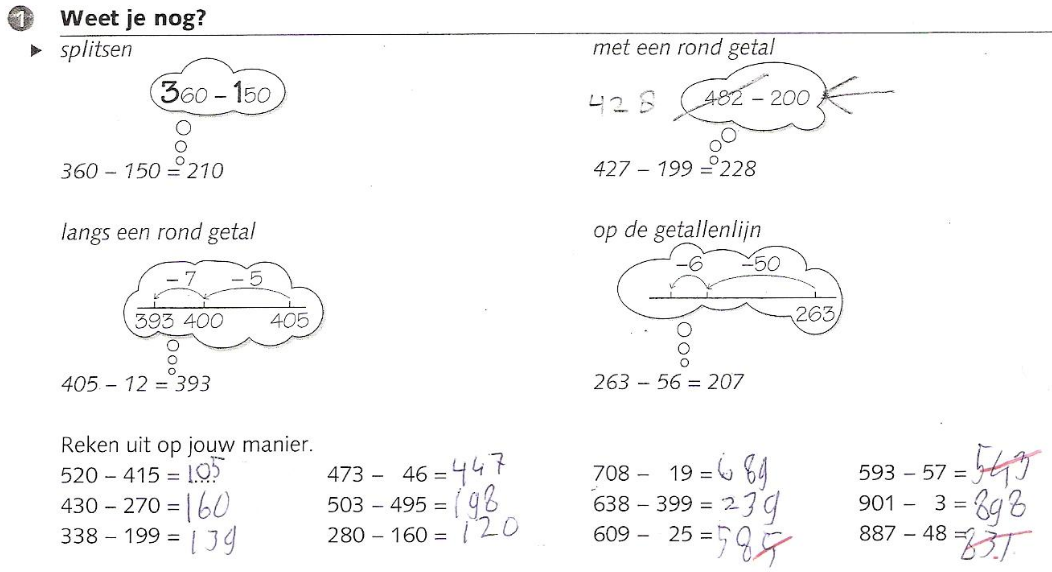
In het tweede voorbeeld na de regel voor de deling komt al een breuk voor. In eerste aanleg is dit echter slechts een voorstelling van het quotient dat overblijft. Breuken worden pas in een volgende klas behandeld!

Het gaat in deze verhandeling niet over didaktiek, maar zeker is dat de invoering van breuken en elementaire bewerkingen met breuken in de negentiende eeuw kon bogen op de didaktische ervaringen van zeer veel vroegere generaties. Niemand dacht er toen over nieuwe rekenmethoden in te voeren, zoals dat in de twintigste eeuw gebeurd is, zonder de nodige didaktische ervaringen. ‘Vroeger’ ging het er om het uitvoeren van elementaire rekenkundige bewerkingen automatismen te laten worden. Rekenen leren was net zoiets als leren zwemmen: wie het eenmaal kan, verleert het nooit meer. Nadat een en ander was uitgelegd, volgden de regels en kwamen de oefeningen, de laatste net zo veel als nodig was om de bewerkingen te beheersen. Of de uitleg en de regels onthouden werden, was niet belangrijk, hoewel iedere ‘oudere’ zich de regel ‘delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde’ nog kan herinneren en er zo nodig naar handelt. Tafels van vermenigvuldiging werden zo lang herhaald dat over geen van de vermenigvuldigingen die in staartdelingen kunnen voorkomen meer hoefde te worden nagedacht. Let wel, de tafels werden in de vorm van $1 \times 8 = 8$, $2 \times 8 = 16$, $3 \times 8 = 24$, ..., $10 \times 8 = 80$ opgezegd. Er werd niet volstaan met het memoriseren van het rijtje 0 (!), 8, 16, 24, ..., 72 zoals dat tegenwoordig wel voorkomt. Geen wonder dat leerlingen die daarmee opgevoed zijn, naderhand nog niet eens meteen kunnen zeggen dat zeven keer acht zesenvijftig is.

Het is onbegrijpelijk dat de klassieke rekenwijzen en -methoden grotendeels overboord zijn gezet. Hoe dat zo gekomen is, mag een taak voor ideeënhistorici worden. Of er een verband is tussen de wijze van toetsen en hoofdrekenopgaven is ook iets wat nader onderzocht zou kunnen worden. Als toetsen zo opgesteld worden dat uitwerkingen op papier niet beoordeeld (kunnen) worden, dus dan maar achterwege moeten blijven, is er letterlijk en figuurlijk geen ruimte voor een opgave als 648 x 93457. Als de lessen er vervolgens voornamelijk op gericht worden om toetsopgaven te kunnen maken, blijft er weinig gelegenheid meer over voor oefening in opgaven die niet uit het hoofd kunnen worden gemaakt. Daar blijft helemaal geen tijd meer voor over, als de leerlingen eerst nog eens vervelende verhaaltjes moeten lezen en begrijpen, zoals de aan arithmofobie lijdende voorstanders van 'realistisch rekenen' ons willen doen geloven. Vergeet niet dat er veel oefening nodig is alvorens het stadium van automatismen bereikt wordt.

Wat is er tégen om automatismen aan te leren? Wat is er vóór om te verhinderen dat automatismen ontstaan? Wanneer kan iemand zwemmen, stukadoren, autorijden, salto's maken, pianospelen, vioolspelen, lezen, rekenen? Jongeren hebben er recht op om dingen blijvend aan te leren, dus recht op leraren die er voor zorgen dat ze automatismen ontwikkelen.

Over leraren gesproken, van hen wordt verwacht dat zij niet alleen kunnen beoordelen dat leerlingen fouten hebben gemaakt, maar ook begrijpen hoe zij tot fouten gekomen zijn. In het klassieke rekenonderwijs was dat eenvoudig, sterker nog, hadden de leerlingen zelf mogelijkheden om hun fouten op te sporen en te corrigeren. In het 'moderne', of beter 'postmoderne' want chaotische, op hoofdrekenenen gerichte rekenonderwijs is dat veel moeilijker, om een *understatement* te gebruiken. Hopelijk is het volgende voorbeeld, dat overgenomen is uit een rekenschrift van een basisscholier, een teken aan de wand (Daniel 5: 25) en wordt ingezien dat het huidige rekenonderwijs de dood in de pot is.



Weet je nog?

splitsen

360 – 150

360 – 150 = 210

met een rond getal

428 ~~482~~ – 200

427 – 199 = 228

langs een rond getal

–7 –5

393 400 405

405 – 12 = 393

op de getallenlijn

–6 –50

263

263 – 56 = 207

Reken uit op jouw manier.

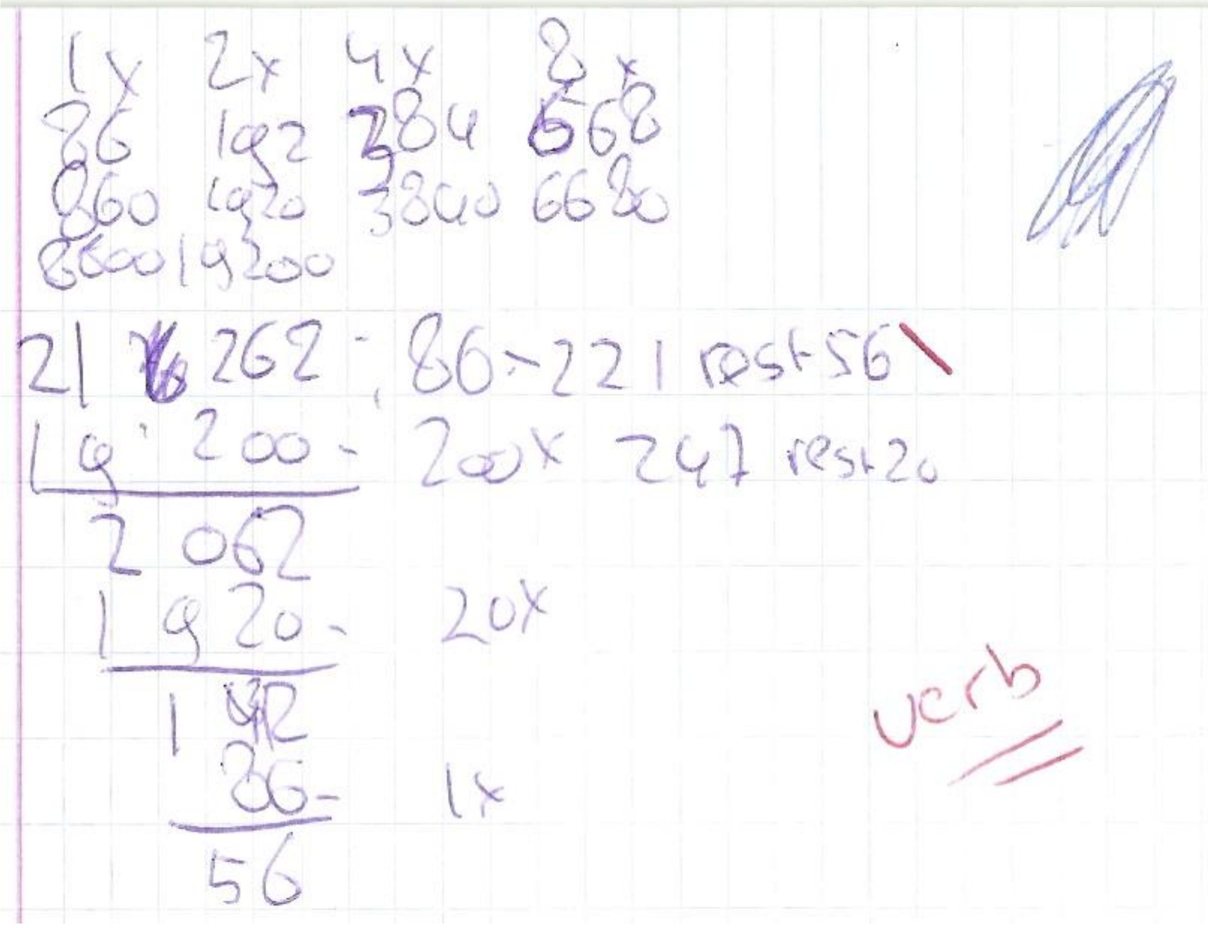
520 – 415 = 105	473 – 46 = 447	708 – 19 = 689	593 – 57 = ~~543~~
430 – 270 = 160	503 – 495 = 198	638 – 399 = 239	901 – 3 = 898
338 – 199 = 139	280 – 160 = 120	609 – 25 = ~~585~~	887 – 48 = ~~831~~

Voor de duidelijkheid volgen hier de uitwerkingen in gedrukte vorm:

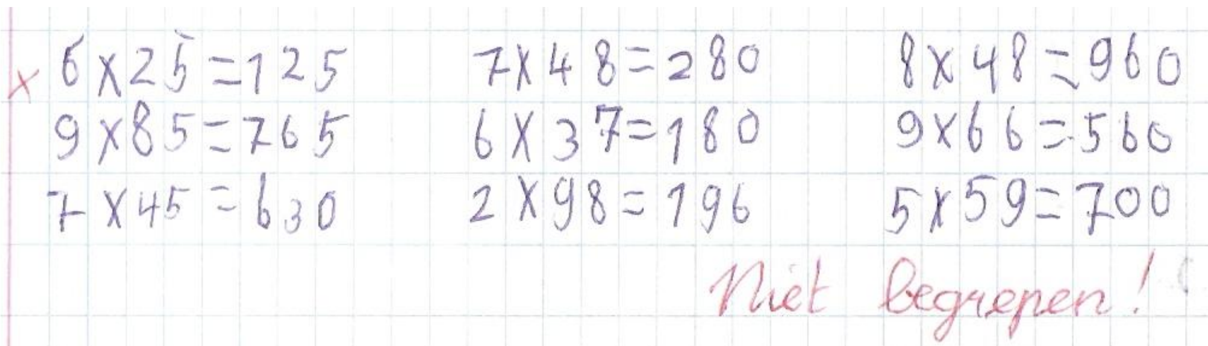
520 – 415 = 105	473 – 46 = 447	708 – 19 = 689	593 – 57 = ~~543~~
430 – 270 = 160	503 – 495 = 198	638 – 399 = 239	901 – 3 = 898
338 – 199 = 139	280 – 160 = 120	609 – 25 = ~~585~~	887 – 48 = ~~831~~

Afgezien van de omslachtigheid om vier manieren te laten onthouden – is het niet veel economischer om de opgaven onder elkaar te schrijven? – klopt er iets niet. De lezer wordt dan ook uitgenodigd, deze opgaven op de oude, beproefde manier te maken, vervolgens de zo verkregen antwoorden met de bovenstaande uitkomsten te vergelijken, en tenslotte de vraag te beantwoorden: kunnen die Pabo-studenten het wel helpen dat zij niet (meer) zo goed kunnen rekenen? Hebben zij genoeg oefening gehad in het uiterst zorgvuldig onder elkaar schrijven van cijfercombinaties die bij complexe rekenkundige opgaven voorkomen?

Het is waar dat hedendaagse scholieren hun rekensommen in een ruitjesschrift maken, maar zelfs bij eenvoudige aftrekkingen leiden de tegenwoordig aangeleerde doorstrepingen tot chaos, om maar te zwijgen van de correcties die nodig zijn als per ongeluk een vergissing is gemaakt. Dit kan gemakkelijk worden gedemonstreerd aan het volgende voorbeeld van een deling die volgens de nieuwe richtlijnen is uitgevoerd. Het is eveneens overgenomen uit een werkschrift.



Als toegift volgt hier een laatste voorbeeld uit een werkschrift, nu met het commentaar van de onderwijzer dat voor tweeërlei uitleg vatbaar is:



Literatuur.

Strootman, H. (1855). *Beginselen der cijferkunst, bepaaldelijk ten dienste van hen, die zich verder op de wiskunde willen toeleggen. Eerste gedeelte*. Vierde vermeerderde druk. Breda: J. Hermans.

Visser, H. (2005). Reële bezwaren tegen realistisch reken- en wiskundeonderwijs. In: Maria L. A. Rietdijk – Helmer (red.), *Steeds minder leren. De tragedie van onderwijshervormingen. Essays.* Utrecht: IJzer, 293-302

Henk Visser