REKENEN EN WISKUNDE OUDE EN NIEUW STIJL

Nadat bekend was geworden dat studenten van hogere opleidingen tekortschieten in rekenkundige en wiskundige vaardigheden, haastten docenten en studenten zich te verklaren dat er meer wiskundelessen in het voorbereidend hoger en wetenschappelijk onderwijs zouden moeten worden gegeven. Maar is dat inderdaad de oplossing voor de gesignaleerde gebreken? Liggen de problemen niet veeleer aan het *soort* rekenen en wiskunde dat de laatste vijfentwintig jaren onderwezen wordt? Waarom waren er 'vroeger' geen klachten en nu wel?

Om te beginnen met het rekenonderwijs op de basisschool: in tegenstelling tot het rekenonderwijs op de *lagere* school ligt de nadruk op zogenaamd realistisch rekenen. Hierbij worden eenvoudige rekenkundige opgaven 'verpakt' in 'verhaaltjes' die door volwassenen bedacht zijn, maar kinderen niet echt aanspreken. De sommetjes zelf dienen uit het hoofd te worden uitgerekend en wel op een wijze die 'inzichtelijk' zou zijn. Zo moeten kinderen voor optellingen en aftrekkingen van twee getallen boven de 20 vier manieren leren, te weten 'splitsen', 'met een rond getal', langs een rond getal' en 'op de getallenlijn'. Men vraagt zich af wie dat bedacht heeft.

Het rekenonderwijs oude stijl was daarentegen vooral gericht op het bijbrengen van schriftelijke vaardigheden zoals optellingen van meerdere grote getallen en breuken, grote vermenigvuldigingen en staartdelingen, die pertinent niet uit het hoofd kunnen worden uitgevoerd, behalve dan misschien door rekenwonders zoals in het verleden Willem Klein. Het grootste deel van de didaktiek was hierop gericht: de leerlingen dienden de uitkomsten van *alle* deelberekeningen zoals vermenigvuldigingen van twee getallen onder de 10 onmiddellijk paraat te hebben. Optellingen van twee *of meer*, als het moet wel *meer dan tien* getallen werden net zo uitgevoerd als de berekening van het totaal van de weekuitgaven in een huishoudboekje. De uitkomsten werden door de rekenaar zelf gecontroleerd door 'van onder naar boven' te werken. Zo is het eeuwen lang goed gegaan. Men vraagt zich af waarom dat veranderd moest worden.

Het contrast met de huidige didaktiek is opvallend. Hoewel er nog wel tafels worden geleerd, leidt dit zelfs bij de genoemde vermenigvuldigingen van twee getallen onder de 10 niet tot automatismen die op latere leeftijd behouden blijven, kennelijk omdat er te weinig geoefend wordt in de sommen van 'vroeger'.

Uit eigen onderzoek is gebleken dat de uitkomst van bijvoorbeeld 8 maal 7 door abituriënten pas na enkele tussenstappen en zelfs dan nog niet foutloos gegeven werd.

Schriftelijke vaardigheden zoals het uitwerken van een som als (6789×6789 – 2345×2345):9134 worden niet meer bijgebracht. In Cito-voortgangs- en eindtoetsen gaat het immers ook alleen of nagenoeg alleen maar om sommetjes die geen extra papier en potlood vergen, maar wel een beroep doen op een leesvaardigheid die niets met rekenen te maken heeft. Met het verdwijnen van samengestelde opgaven als de zojuist genoemde hangt bovendien een latere algebraïsche behandeling ervan in de lucht, terwijl die indertijd inzicht (!) verschafte in het eerder opmerkelijk geachte verschijnsel dat de delingen zo mooi op 0 uitkwamen.

Een ‘eigenaardigheid’ van de oude aanpak was dat mensen tot op hoge leeftijd opgaven als de vorige konden blijven maken. Bij voldoende oefening gingen de daarvoor vereiste vaardigheden niet verloren. Niemand hoefde te vragen ‘hoe het ook al weer was’, wat bij de nieuwe benadering betwijfeld moet worden, gezien de bovengenoemde resultaten met 8 maal 7.

Zoals gezegd vereist de ‘realistische’ aanpak dat zoveel mogelijk toetsopgaven in de vorm van een quasi-alledaagse opgave in woorden worden ingebed. Los van het probleem dat kinderen met een andere moedertaal dan het Nederlands hierdoor benadeeld worden, wordt hierdoor het inzicht in het onderscheid tussen wiskundige en empirische grootheden miskend. Dit manco zet zich in versterkte mate voort in het wiskundeonderwijs in de scholen voor voorbereidend hoger en wetenschappelijk onderwijs. Geef een betere leerling daarvan het klassieke vraagstuk van de regenbak van Hero van Alexandrië in de formulering van het boek *Peinzen en piekeren. Frivole wiskunde* uit 1940:

> *Een regenbak kan door vier bronnen gevoed worden; en wel levert de eerste bron zooveel water, dat daarmede de bak in een dag gevuld kan worden, de tweede bron heeft twee dagen noodig om den bak te vullen, de derde bron drie dagen en de vierde zelfs vier dagen. In hoeveel tijd zou de regenbak vol zijn, indien alle vier de bronnen gelijktijdig water leveren?*

De kans is groot dat hij of zij als antwoord geeft: ’11 uur en 31 minuten en 12 seconden’. Wat een overbodig werk voor een vraagstuk dat alleen ogenschijnlijk ‘realistisch’ is vormgegeven! (In dit geval komt de uitkomst ‘gelukkig’ nog op hele seconden uit …)

Dit was niet zo maar een opgave. Zij kon zowel op de *lagere* school als op de *middelbare* school worden opgegeven, in het laatste geval bij het onderwerp vergelijkingen met één onbekende, maar niet met de bedoeling om het antwoord in seconden of op zoveel decimalen nauwkeurig te laten berekenen. De leerlingen dienden zulke vraagstukken ook te leren oplossen in ‘abstracte’ gedaante, met variabelen in plaats van ‘concrete’ aantallen. Getalenteerden onder hen konden hun hart ophalen als de verkregen formules ook nog ‘mooi’ waren. Wat dat betreft heeft het afschaffen van het vak Analytische meetkunde op de gymnasia de aantrekkingskracht van een universitaire wiskundestudie ook niet bevorderd.

‘Vroeger’ werden in de wiskundelessen ingeklede vergelijkingen pas opgegeven nadat de formele vaardigheden die nodig zijn voor het eigenlijke, dat is wiskundige probleem terdege geïntroduceerd en geoefend waren in zuiver wiskundige contexten. Het idee hierachter was ook dat ‘abstracte’ kennis en vaardigheden beter in verschillende specifieke contexten kunnen worden benut dan kennis en vaardigheden die aangebracht zijn in een beperkt aantal specifieke contexten.

Overigens was het toepassen van wiskundige kennis en vaardigheden geen doel van het vroegere wiskundeonderwijs. Toepassingen werden geacht aan de orde te komen op de daarvoor geëigende plaatsen, zoals het natuurkundeonderwijs en het onderwijs in de economische wetenschappen. De tegenwoordige ‘redactiesommen’ die in de wiskundelessen worden opgegeven, doen daarentegen niet zelden een beroep op formules waarvoor geen enkele empirische of experimentele rechtvaardiging wordt gegeven. Over ‘inzicht’ gesproken …

Bovendien is het ‘inzicht’, waar de huidige rekendidaktiek zo op gericht is, een hersenschim indien eindexamenkandidaten bijvoorbeeld al moeite hebben om twee getallen met som -1 en product -56 te vinden als zij de vergelijking $x^2 - x - 56 = 0$ moeten oplossen. En dat terwijl deze opgave slechts een klein onderdeel van een ingewikkelder algebraïsch vraagstuk hoeft te zijn.

Dit streven naar zogenaamd inzicht is één van de factoren die het tekortschieten in wiskundige vaardigheden hebben bevorderd. Miskend wordt dat rekenkundige bewerkingen snel ‘mechanisch’ moeten kunnen worden uitgevoerd, terwijl ‘inzichtelijke’ methoden daarvoor remmend kunnen werken. ‘Wat moet ik doen, splitsen of met een rond getal, of …?’

Ook algebraïsche bewerkingen dienen routinematig te worden uitgevoerd. De huidige generatie leerlingen – en leraren – zou versteld staan als zijn te zien kregen tot welke hoogte vroegere ULO-A-leerlingen hierin gebracht werden. Zij waren in staat een formule als $(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$ om te werken tot een product, terwijl (alweer uit eigen onderzoek) gebleken is dat naar schatting hoogstens een derde van de huidige afgestudeerden VWO met wiskunde B daartoe in staat moet worden geacht. Kennelijk heeft de rest zulke opgaven nooit uitgebreid geoefend.

Geen wonder dat er in het hoger en wetenschappelijk onderwijs geklaagd wordt over het gebrek aan zowel rekenkundige als zuiver wiskundige ‘technische kennis’. Maar de oplossing van dit probleem is niet een handhaving of uitbreiding van het huidige aantal lesuren wiskunde zonder meer, het vereist een drastische terugkeer naar de oude beproefde reken- en wiskundemethoden met zoveel ‘technische’ opgaven als nodig is om ze ‘mechanisch’ te kunnen oplossen. Opmerkelijk hieraan is ook dat het verwerven van de daarvoor benodigde formele vaardigheden veel minder tijd in beslag neemt dan het eindeloos oefenen in sommetjes met tussenstappen, om nog maar te zwijgen van de tijd die verspild wordt aan het lezen van al die ‘realistische’ verhaaltjes en het bepalen van uitkomsten in zoveel decimalen. (Het gebruik van grafische rekenmachines in het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs komt weliswaar aan het laatste tegemoet, het leidt echter niet tot grotere *wiskundige* vaardigheden.)

Maar hoe staat het dan met het broodnodige rekenkundige en wiskundige inzicht? Het gaat te ver om hier een beschouwing te geven over deze ‘tweede-ordekennis’ die te vergelijken is met grammaticaal inzicht in de zin dat het uit het hoofd kunnen uitrekenen van eenvoudige opgaven met tussenstappen net zo min getuigt van rekenkundig *inzicht* als het uitspreken van correcte grammaticale zinnen van grammaticaal *inzicht*. Als zij al ontstaan, ontstaan inzichten in het *hoe* van ‘constructies’ pas nadat deze ‘mechanisch’ uitgevoerd kunnen worden, en foutieve en correcte resultaten van elkaar kunnen worden onderscheiden. Inzichten in het *waarom* ervan liggen nog verder weg en sommigen komen daar nooit (meer) aan toe, denk aan de bovengenoemde rekenopgave van de vorm $(a^2 - b^2):(a + b)$. Het is een illusie om te denken dat die al door beginners kunnen worden verworven.

Dat ‘realistische’ vraagstukken geen enkele esthetische waarde hebben is duidelijk. Wie wordt geboeid door een uitkomst in seconden of in tien decimalen nauwkeurig? Wat een tegenstelling tot de wiskunde oude stijl! Alleen al de bovengenoemde vraag om $(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$ tot een product te herleiden, heeft een antwoord dat ook ‘mooi’ gevonden werd door degenen die het probleem niet konden oplossen: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

Gepensioneerde wiskundeleraren herinneren zich ongetwijfeld nog hoeveel voldoening het hun en hun leerlingen gaf als zij een algebraïsch vraagstuk hadden bedacht, respectievelijk hadden opgelost dat ‘goed’ uitkwam, vergelijkbaar met de delingen uit een vroeger stadium die op nul uitkwamen. Wat is daar van over?

Dit brengt mij, tot slot, bij een saillant verschil tussen rekenen en wiskunde oude en nieuwe stijl. Bij de oude stijl was het bij foute uitwerkingen duidelijk waar er iets mis was gegaan en niet zelden kon dat bij herberekeningen ook door de leerling zelf worden ontdekt. Bij de nieuwe stijl is dat maar al te vaak onmogelijk. Ter adstructie geef ik hieronder een rijtje sommetjes uit een werkschrift van een basisschoolleerling met het commentaar van de onderwijzer dat voor tweeërlei uitleg vatbaar is:

$6\times25=125$	$7\times48=280$	$8\times48=960$
$9\times85=765$	$6\times37=180$	$9\times66=560$
$7\times45=630$	$2\times98=196$	$5\times59=700$

Niet begrepen!