Realistisch reken- en wiskundeonderwijs
Vaardigheden of inzicht?

Inleiding: de eerste aanzet

De bekende meesterpianist Daniel Wayenberg gaf in de jaren zestig van de vorige eeuw eens een *masterclass* aan het Muzieklyceum te Amsterdam waar veel uit te leren viel. Nadat hij verschillende veelbelovende pianostudenten had aangehoord, riep hij op een gegeven moment in vertwijfeling uit: 'Studeren jullie eigenlijk wel toonladders?' Het antwoord van de studenten was ontkennend en zij gaven ook een verklaring voor dit toen nieuwe verschijnsel in de pianodidactiek: 'Toonladders en drieklanken komen al in elk stuk voor, dus waarom zouden we ze apart moeten oefenen?'[1]

Het is eigenaardig dat een eeuwenlange traditie die altijd goed gewerkt heeft, opeens door docenten verlaten kan worden met argumenten waarin niet wordt ingegaan op het nut van de traditionele aanpak. In het bovenstaande voorbeeld waren het pianodocenten die dachten het muziekonderwijs te moeten vernieuwen. Gelukkig zijn zij of althans hun opvolgers op hun schreden teruggekeerd. Het apart studeren van toonladders en gebroken akkoorden heeft zin doordat leerlingen daarmee getraind worden in het moeite- en vlekkeloos horen en ten gehore brengen van regelmatig passagewerk. Hierdoor kunnen zij in de praktijk bewust dynamische en agogische accenten toepassen.

Wat dat betreft hebben de muziekdocenten hun les geleerd. Het was vroeger zo gek nog niet. Maar helaas zijn onderwijzers en leraren – of moet ik zeggen: 'onderwijskundigen' – nog lang niet zover, getuige het monopolie van het realistische rekenen en de realistische wiskunde dat heden ten dage niet doorbroken schijnt te kunnen worden. Laat ik een en ander proberen uit te leggen aan de hand van een stukje voorgeschiedenis.

De oorsprong van de 'nieuwe' didactiek van realistisch reken- en wiskundeonderwijs, die een eeuwenlange traditie afgeschaft heeft, ligt ook in de jaren vijftig en zestig van de twintigste eeuw. Ik zal mij overigens niet wagen aan een verklaring voor deze merkwaardige overeenkomst. Feit is – en nu spreek ik over de Nederlandse situatie – dat er toen in didactische literatuur een aandachtsverschuiving is opgetreden van 'technische vaardigheden' naar 'inzicht'. Een 'pionier' op dit gebied was Pierre Marie van Hiele die in 1957 bij Hans Freudenthal promoveerde op het proefschrift *De problematiek van het inzicht gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-*

[1] Geciteerd naar een mondeling verslag van een deelnemer aan deze *master class*.

leerstof. Hier wordt 'het toetsen aan nieuwe situaties' het 'kenmerkende' van 'inzicht' genoemd, met toepassingen van algebra in de natuurkunde als bijzonder geval. Van realistische wiskunde is echter nog niet direct sprake. Wel lijken technische vaardigheden al in het begin met een zekere scepsis bezien, getuige de instemming die Van Hiele betuigt met het volgende citaat van ene Castiello, auteur van een boek *Geistesformung*:

> Es ist nichts, was der formalen Bildung mehr schadet als das Mechanische.[2]

Het is bekend dat veelvuldig oefenen in 'oude', dat is soortgelijke situaties, er op den duur toe leidt dat alles vanzelf gaat, met andere woorden 'mechanisch' lijkt te verlopen. Dit krijgt niet meer de aandacht die het traditioneel had bij Castiello's attitude en de nadruk op nieuwe situaties, integendeel. Er wordt namelijk gesuggereerd dat het hier ging om een 'didactiek, die ingesteld is op de ontwikkeling van het algoritmentype',[3] dat wil zeggen, een 'onderwijs dat gericht is op het zo goed mogelijk inoefenen van algoritmen in behoorlijk onderling verband, (dus niet verdeeld in willekeurige leseenheden), maar dat zich niet ten doel stelt verbindingen te leggen tussen deze algoritmen en de structureringen van het waarnemingsveld'.[4] Alsof, terug naar Daniel Wayenberg, het 'mechanisch' kunnen spelen van toonladders en drieklanken doel in plaats van middel van diens lessen zou zijn. In de muziekdidactiek gaat het echter om een technische beheersing die onontbeerlijk wordt geacht bij de uitvoering van 'echte' muziek. Zonder technische beheersing van oefenmateriaal, blijft de volgende stap, de muzikale interpretatie van composities in karikaturen steken.

Het 'traditionele' reken- en wiskundeonderwijs was strikt opbouwend. Zodra bepaalde vaardigheden voldoende geoefend waren, werden zij ingezet bij een volgend onderwerp. Er was weldegelijk sprake van toepassingen in nieuwe situaties. Dit gaf complicaties, maar de beheersing van de techniek stond er garant voor dat althans daar geen problemen meer mee waren.

Wat hebben sommige 'onderwijskundigen' toch tegen het aanleren van 'technieken'? Zelfs technologische ontwikkelingen werden al in 1957 door Van Hiele aangegrepen om dat naar het tweede plan te verwijzen:

> Men zal bovendien moeten overwegen, of het in de tegenwoordige tijd, nu het opereren met bestaande algoritmen meer en meer door

[2] Van Hiele (1957), p. 6.
[3] Idem., p. 115.
[4] Idem, p. 60.

> machines wordt overgenomen, nog zinvol is hier opgroeiende mensen eenzijdig mee te belasten.[5]

Alsof het ooit de bedoeling is geweest, leerlingen uitsluitend technieken aan te leren. En het is ook tendentieus om het te doen voorkomen dat zij daarmee'belast' werden. Welke onderwijzer of docent van de oude stempel kent niet het geluksgevoel dat zijn pupillen hadden als zij fout- en moeiteloos staartdelingen konden uitvoeren, respectievelijk haakjes wegwerken of kwadratische vormen ontbinden?

Ook werd door Van Hiele een meer filosofisch argument gebruikt tegen de ontwikkeling van een algoritmentype dat inderdaad in de richting van realistische wiskunde lijkt te gaan:

> Het kenmerkende van zo'n algoritmentype is toch immers, dat zijn inzicht berust op een structurering met symbooleenheden als objecten, terwijl de betrekking van deze symbolen met de ervaringswereld aan de persoon onvoldoende bekend is.[6]

Weliswaar gaat het hier om toepassingen van wiskunde in natuur- en scheikunde, maar men kan zich voorstellen dat het toenemende gebruik van wiskunde in middelbare-schoolvakken als economie en biologie, respectievelijk het meer en meer in zwang komen van het idee dat wiskunde geleerd moet worden om ze te kunnen toepassen, een 'realistische' didactiek hebben bevorderd.

De huidige situatie

Bij kinderen vindt de eerste kennismaking met wiskunde op de basisschool plaats. En daar heeft de realistische school het voor het zeggen gekregen getuige de Cito-toetsen. Worden er dan geen "zuiver rekenkundige opgaven meer gegeven? Jawel, er zijn sommen met elk van de vier elementaire bewerkingen, maar de traditionele wijzen van uitvoeren worden niet meer aangeleerd, kennelijk omdat het maar 'algoritmen' zijn en niet gebaseerd zijn op 'inzicht'. Zo zijn er voor optellingen van twee getallen vier 'inzichtelijke' 'methoden',

(1) 'splitsen': 360 – 150 = **3**60 – **1**50 = 210
(2)'met een rond getal': 427 – 199 = (428 – 200) + 1
(3)'langs een rond getal': 405 – 12 = (405 – 5) – 7
(4) 'op de getallenlijn': 263 – 56 = (263 – 50) – 6

[5] Idem, p. 61.
[6] Idem, p. 86.

Bij de derde en vierde methode worden de leerlingen kennelijk geacht zich een soort voorstelling van een meetlat te maken, in het eerste geval met markeringen 405, 400 en 393.

Wat is het nut van deze aanpak? De bovenstaande voorbeelden zijn ontleend aan een opgave uit een werkschrift. Zij werden ingeleid met de woorden ‘Weet je nog?’ en waren vergezeld van ‘hulpvoorstellingen’. Daarna kwamen de opgaven. En zo trof ik het volgende aan in het werkschrift van een basisschoolleerling:

520 – 415 = 105	473 – 46 = 447	708 – 19 = 689	593 – 57 = 543
430 – 270 = 160	503 – 495 = 198	638 – 399 = 239	901 – 3 = 898
338 – 199 = 139	280 – 160 = 120	609 – 25 = 585	887 – 48 = 831

De onderwijzer had kennelijk twee fouten over het hoofd gezien, wat op zich zelf al een veeg teken is. Hier zijn de goede uitkomsten van de desbetreffende aftrekkingen, op de goede oude manier bepaald:

473	503
46	495
427	8

Wat een verspilling van energie, tijd, talent en wat dies meer zij, als leerlingen eerst moeten onderzoeken hoe zij het zullen aanpakken? En hoe kwam de scholier eigenlijk aan zijn foute antwoorden?

‘Vroeger’ konden lagere-schoolleerlingen aan het eind van de rit optellingen van verscheidene getallen onder elkaar, aftrekkingen met grote getallen onder elkaar, en dito met vermenigvuldigingen en staartdelingen uitvoeren. En als er in de aanloop daartoe fouten werden gemaakt, waren die gemakkelijk te analyseren en te corrigeren – niet zelden door de scholieren zelf. Bovendien is gebleken dat eenmaal in iemands jeugd aangeleerde vaardigheden tot op hoge leeftijd behouden blijven. Van Hiele wist dit toen hij bij een vraagstuk bemerkte dat hij op zijn vijfenzeventigste nog kon zeggen: ‘dat spelletje van toen kan ik nog spelen’[7] Maar hij trok daaruit de verkeerde conclusie:

> Maar het blijft een spelletje. Ik vraag me nu nog wel eens af of ik die tijd niet beter had kunnen besteden. Het enige dat goed is [is] dat ik nu weet dat ik het nog kan. Meer niet.[8]

[7] Van Hiele (1985), p. 126v.
[8] Idem, p. 127.

Denken de realistische wiskundeonderwijskundigen werkelijk dat hun ‘inzichtelijke methoden’ ook een leven lang beklijven?

De vermeende tijdverspillende methoden van ‘de goede oude tijd’ bestaan niet meer in Nederland. In plaats daarvan zijn de opgaven uitgebreid met teksten en plaatjes. (Je zult als leerling toch maar een taalachterstand hebben. Word je daar ook nog eens de dupe van bij het rekenen.)

Om een voorbeeld te geven: één van de moeilijkste opgaven van de voortgangstoets Rekenen-Wiskunde 2002 voor leerlingen aan het eind van groep 7 begon met een tekeningetje van een gedeelte van een polshorloge met de vermeldingen 16.38 en *Quartz*, en het volgende schema:

Vertrektijden
naar Hoofddorp
16.02
16.32
17.02
17.32

Vervolgens kwam de volgende tekst:

> Tamara wil met de bus naar Hoofddorp.
>
> Hoe lang moet ze nog wachten? __________ minuten.

Een ‘realistisch’ persoon zou hier zoiets antwoorden als: ‘Dat hangt er van af, of het afgebeelde horloge wel de juiste tijd aangeeft, aangenomen dat het ’t horloge van de genoemde Tamara is, of de bus op tijd komt, aangenomen dat de vertrektijden betrekking hebben op de bus waar deze Tamara op staat te wachten – ja, waar staat ze eigenlijk, ze zit toch niet nog thuis, en wil ze wel op dezelfde dag met de bus naar Hoofddorp – enzovoort, enzovoort, maar wat heeft dat in hemelsnaam met rekenen en wiskunde te maken?’

Het lijkt er meer op dat leerlingen afgeleerd wordt kritisch na te denken. In plaats van de betrekkelijk eenvoudig te leren eeuwenoude uniforme ‘algoritmen’ komen verwarrende keuzemogelijkheden zo niet onmogelijkheden. Geen hout snijdt de tegenwerping dat er geen inzicht te pas komt bij de klassieke wijze van aftrekken. Die gaat als volgt bij

$$\begin{array}{r} 473 \\ \underline{46} \\ 427 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 503 \\ \underline{495} \\ 8 \end{array}$$

Het opschrijven van de uitkomsten, die van rechts naar links worden opgeschreven wordt al dan niet in gedachten begeleid door de uitspraken ‘13 – 6 = 7’, ‘6 – 4 = 2’ en ‘4’ respectievelijk ‘13 – 5 = 8’, ‘9 – 9 = 0’, ‘4 – 4 = 0’, waarbij in het laatste geval eventueel de eerste 0 nog wordt opgeschreven en later uitgegumd.

Deze methode vereist wel dat aftrekkingen onder de 20 zoals 13 – 6 moeiteloos uit het hoofd worden uitgevoerd. Maar dan kan de juistheid ervan ook zonodig weldegelijk ‘inzichtelijk’ worden gemaakt.

Dit gebeurt aan de hand van voorbeelden:

$$\begin{array}{r} 73 \\ 6 \\ \hline \\ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 60 + 13 \\ 6 \\ \hline 60 + 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 73 \\ 6 \\ \hline 67 \end{array}$$

Belangrijk is natuurlijk dat lagere-schoollleerlingen de hoofdbewerkingen onder de knie kregen. Dan hoefden ze daar gelukkig niet meer over na te denken als ze bijvoorbeeld het totaal van hun vakantie-uitgaven en wat er nog over was wilden uitrekenen en controleren. (‘Het klopt niet!’ ‘Heb je het statiegeld van de fles melk wel meegerekend?’)

Staartdelingen waren van oudsher het standaardvoorbeeld van uitwerkingen die ‘de grootste voldoening’ gaven als ze – in de leerfase – ‘op 0’ uitkwamen, bijvoorbeeld in zulke opgaven als

$$\frac{6789\times6789 - 2345\times2345}{9134}$$

Het principiële punt is al eerder duidelijk gemaakt: Er zijn vaardigheden die moeiteloos moeten worden beheerst, zodat er tijd overblijft om ‘echte’ problemen op te lossen. Hieronder valt ook het type problemen dat in natuurkundelessen voorkomt als daar een vraagstuk de opstelling van een ‘wiskundige’ vergelijking vereist. Is dat echte probleem opgelost dan is de rest dankzij de wiskundelessen een fluitje van een cent en daarna kan de wiskundige uitkomst natuurkundig geïnterpreteerd worden. Dit kan bijvoorbeeld bij een vierkantsvergelijking om te beginnen door aan een negatieve uitkomst geen natuurkundige betekenis toe te kennen.

Er is meer. Realistisch onderwijs veronachtzaamt een principieel verschil tussen wiskunde en ‘empirische’ wetenschappen. Dit wordt al voorbereid op de huidige basisschool als het gaat om uitkomsten die niet precies bepaald kunnen worden. Dat was in de tijd van de staartdelingen wel anders!

Het is opvallend dat in zeven van de twintig opgaven van de Taak Rekenen 2 en in vijf van de twintig opgaven van de Taak Rekenen 3 van de Cito-toets 2004 het woord 'ongeveer' voorkwam. Maar het is ook opvallend dat in een aantal meerkeuzetoetsen dit woord niet voorkomt. Wordt er stilzwijgend aangenomen dat de waarden 'exact' zijn omdat daarmee een precieze uitkomst kan worden gevraagd? Een paar keer wordt 'teruggegrepen' op het woordje 'precies': 'Een kunstenaar maakt een beeld. Hij heeft daarvoor precies ¼ deel nodig van deze plaat.' en 'De treinreis duurt precies drie kwartier.' Is het niet fantastisch dat de kunstenaar en de trein zich zo wiskundig gedragen?

Onzin natuurlijk. Maar de verwarring stijgt ten top in de realistische 'wiskunde' van het voortgezet onderwijs. Een ernstige fout is dat het onderscheid tussen wiskundige en natuurkundige grootheden volledig vervaagd is. Er is niet veel fantasie nodig om te bedenken dat dit rampzalige gevolgen kan hebben voor het wiskundige inzicht van de 'jeugd van tegenwoordig'.

Bovendien krijgen zij allerlei formules voorgeschoteld, zoals[9] $L_\alpha(t) = \alpha{\cdot}3{,}6(1 - e^{-2{,}5\alpha t})$ of zelfs

$$y = c(e^x + e^{-x})$$

zonder dat zij ook maar iets weten van de empirisch-wetenschappelijke basis daarvan. Ik durf zelfs te beweren dat de meeste leerlingen evenmin een wiskundig inzicht in de laatste functie hebben.

Voor natuurkunde- en techniekstudenten mag deze vermenging van zuivere wiskunde en toegepaste wiskunde onbelangrijk worden gevonden, maar wiskundestudenten, voorzover nog in Nederland aanwezig, zijn hier niet mee gediend. Datgene wat wiskunde *wiskundig significant* maakt, het voorkomen van interessante bewijsbare wiskundige betrekkingen die losstaan van benaderingen en waarop wiskundig verder kan worden gebouwd, is uit het zicht geraakt. Alsof een opgave pas geslaagd is als er maar een numerieke waarde uitkomt, bij voorkeur gevonden met behulp van een (grafische) rekenmachine.

Vaardigheden èn inzicht

Eén van de leermeesters van Pierre Van Hiele was Gerrit Mannoury. Deze doorgewinterde docent gaf ooit een beschouwing over algebraonderwijs die regelrecht in strijd is met de ideeën van de realistici. Het is daarom de moeite waard om Mannoury's gedachtegang kort weer te geven:

[9] Examen VWO 2005, wiskunde B1,2, opgave Inademen.

- de jeugd is gepredisponeerd voor ‘een *sterk geformaliseerde denkvorm*’
- algebralessen zijn niet populair bij de jeugd, omdat daar niet ‘kunst om de kunst’ wordt beoefend, maar het om praktische toepassingen gaat
- ‘die toepassingen brengen met zich mede, dat aan dezelfde lettersymbolen telkens weer een andere begripsinhoud moet worden gegeven, en dit is nu juist, wat aan jeugdige leerlingen moeilijkheden berokkent’[10]

Hoe het dan wel zou moeten, liet Mannoury zien aan de hand van een voorbeeld uit zijn eigen leraarspraktijk. Bij de behandeling van het onderwerp ‘complexe getallen’ maakte hij gebruik van rechthoekige kaartjes die net zoals dominostenen in tweeën gedeeld waren en gehele getalsaanduidingen bevatten.

Met de hiermee vastgelegde ‘dubbelgetallen’ werd vervolgens een ‘spel’ gespeeld, nadat de spelregels voor zogenoemde ‘pseudo-sommen’ en ‘pseudo-producten’, enz. aan de hand van voorbeelden waren duidelijk gemaakt. Dit stelde de leerlingen in staat zelf dingen te ontdekken, zoals de regel-voor-het-kruislings-vermenigvuldigen.

Mannoury’s didactische commentaar was dan ook:

> Er is misschien geen leerstof, die beter voor de toepassing van de zelfwerkzaamheid der leerlingen geschikt is, dan deze.[11]

Hij baseerde zich op de mening van psychologen in zijn argumentatie tegen een ‘realistische’ aanpak. Niettemin heeft die zich jaren later doorgezet en geleid tot opgaven op de basisschool over ‘bollen wol’ – met een plaatje van *knotten* wol – ‘een fles afwasmiddel ’en ‘ontslagen’, om maar wat voorbeelden uit de Voortgangtoets 2002 te noemen. Daar valt niets interessants, laat staan iets moois aan te ontdekken,

Mannoury’s originele bijdrage was de invoering van een ‘spelelement’. Dat past nog steeds heel goed in die ‘ervaringswereld’ van leerlingen waar Van Hiele het over had. Waarom zou er anders zoiets als de Sudoku-rage kunnen bestaan? En wie kent niet het enthousiasme waarmee scholieren van diverse leeftijden aan het zogenaamde 24-spel deelnemen?[12] Niet zelden kan ook een ‘wedstrijdelement’ worden ingebouwd. Zo liet

---

[10] G. Mannoury (1930), p. 50.
[11] Mannoury (1930), p.52.
[12] Bij het 24-spel wordt gevraagd door optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en/of delen met preciesvier getallen , zeg 2, 3, 5 en 7 als uitkomst 24 te krijgen.

indertijd een leraar klassieke talen in twee klassen ‘λούω opzeggen’ om te kijken welke klas dat in de kortste tijd kon.[13]

Van principieel belang is tenslotte de opvatting dat vaardigheden ‘inzicht’ pas mogelijk maken en niet omgekeerd. Dit gaat al op voor het ambachtsonderwijs. Laat houtbewerkers eerst in plaats van ‘complete’ raamlijsten zo goed en zo veel mogelijk aparte zwaluwstaartverbindingen maken, dan zullen zij aan de hand van hun uiteindelijk meest geslaagde resultaten inzien wat het belang daarvan is. Inzicht heeft namelijk ook betrekking op de kwaliteit van het afgeleverde werk. Als zuiver en ritmisch gespeelde toonladders en gebroken akkoorden in alle mogelijke toonsoorten, respectievelijk overzichtelijk gepresenteerde rekenkundige bewerkingen of algebraïsche afleidingen systematisch geoefend zijn, ‘tonen’ zij ‘structuren’ die onontbeerlijk zijn voor het inzicht waarom die zaken zo en niet anders zo goed verlopen. Door de beperkingen van het materiaal is dit uitermate geschikt voor didactische doeleinden.

In de ‘oude’ didactiek werden de zuiverwiskundige vaardigheden net zo lang geoefend dat de leerlingen ze niet alleen beheersten, maar ook dóór hadden. De ‘toepassingen’ waren echter voornamelijk beperkt tot complexe zuiverwiskundige vraagstukken. Buitenwiskundige toepassingen kwamen pas in andere lessen, zoals voor natuurkunde en economie aan de orde. Als het goed was kregen de leerlingen daar wel inzicht in de achtergronden van de formules die in de modellen gehanteerd werden.

Ik pleit dus voor een terugkeer in Nederland tot de ‘oude’ beproefde wiskundedidactiek, ook al is dat niet *bon ton* in een tijd dat in dit land alles bij voorkeur onbeproefd en ‘nieuw’ moet zijn. Invoering van puzzel- en spelelementen is natuurlijk niet nieuw. Maar als men dan toch ‘vernieuwing’ wil, dan kan het volgende in overweging worden gegeven: laat leerlingen zelf opgaven bedenken.[14] Dat kan al of zelfs *juist* op een elementair niveau. En het draagt bij tot het inzicht dat nodig is om echte wiskunde te kunnen bedrijven.

Literatuur

Mannoury, G. (1930), Een inleiding tot de Signifika, inzonderheid met het oog op het onderwijs in de wiskunde. *Euclides. Tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken.* 7e jaargang (1930-1931), p.1-61.

[13] Alleen werd bij een van de klassen een bepaalde leerling overgeslagen, omdat die de zaak te veel zou ophouden.
[14] Vergelijk Visser (2004).

Van Hiele, P. M. (1957). *De problematiek van het inzicht gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof*. Proefschrift Rijksuniversiteit Utrecht.

Van Hiele, P. (1985), [Ik was wiskundeleraar]. In: Timmer, J. H. e.a., *Ik was wiskundeleraar*. Enschede: Stichting voor de leerplanontwikkeling, 1985, p. 101-136.

Visser, H. (2004), Afscheidsrede en andere lezingen.
.