‘Min maal min is plus’

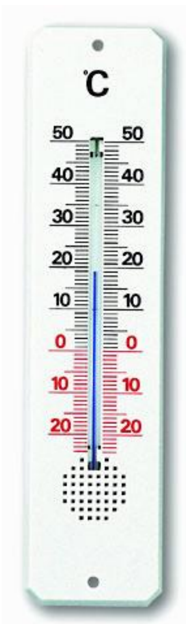
Als ik een verontruste wiskundeleraar moet geloven, is de rekenregel voor het product van twee ‘negatieve getallen’ nog steeds een probleem. Hessel Pot schreef me: ‘waarom willen we dat minmaalmin plus is?’

Hij nam geen genoegen met het antwoord: ‘met die minmaalminisplus-regel gelden voor de negatieve getallen dezelfde rekenregels als voor de positieve getallen!’, waar volgens zijn zeggen Frits Beukers met zoveel woorden toe besloot in een artikel in een vakblad voor wiskundeleraren.

Kennelijk is de ‘officiële’ invoering van negatieve getallen met de methode van definitie door abstractie in vergetelheid geraakt. Ik heb dat in mijn studietijd zo geleerd, dankzij de goede behandeling door E. W. Beth in zijn (tweede geheel opnieuw bewerkte uitgave van) *Wijsbegeerte der wiskunde*, een van de boeken die ik ter verdieping van zijn colleges bestudeerde. Hieronder volgt een aangepaste versie van deze aanpak.

We kunnen gemakshalve aannemen dat ‘iedereen’ boven een bepaalde leeftijd bekend is met natuurlijke getallen, dus met 0, 1, 2, 3, 4, 5, enzovoort, en daar al in een vroeg stadium mee heeft leren rekenen, niet alleen als het over aantallen gaat, maar ook in abstracte opgaven, zoals ‘5 plus 7 is ...’ en ‘5 maal 7 is ...’, met inbegrip van aftrekkingen en delingen waarbij de uitkomst ook een natuurlijk getal is.

Op een gegeven moment dringt het wel tot zo iemand door dat met name aftrekkingen niet altijd opgaan, en dat daarvoor een oplossing werd gezocht door zogenaamde negatieve getallen in te voeren. Dit was op zich zelf niet zo problematisch, want die ‘waarden’ waren met zoveel woorden al bekend in temperatuuraanduidingen van zoveeel graden onder nul:

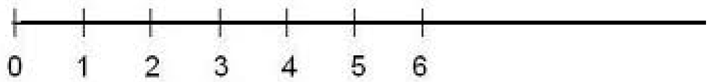


Zo werd al gauw begrepen dat bijvoorbeeld tien graden onder nul zeven graden kouder is dan drie graden onder nul, en ook dat drie graden boven nul tien graden warmer is dan zeven graden onder nul. En in een nog later stadium had menigeen geen moeite met een opgave als: wat is meer, +3 of -7; en: hoeveel is dat dan meer? Geen probleem dus, totdat het stadium werd bereikt dat negatieve getallen ook met elkaar vermenigvuldigd konden en moesten worden, en dat daarbij 'minmaalmin' 'plus' werd. Want waarom was dat eigenlijk? En toen bleven voor iemand die deze vraag wel serieus nam bevredigende antwoorden uit, zoals Hessel Pot terecht opmerkte.

Hoe maken we aan deze onbevredigende situatie een eind? Het zou een schandaal zijn, als dat niet zou lukken, want soortgelijke problemen komen later in verhevigde mate terug bij de zogenaamde imaginaire getallen.

Het zou mooi zijn als de methode van definitie door abstractie kon worden uitgelegd op een manier, die eerstejaarswiskundestudenten moeten kunnen begrijpen. Want daamee worden negatieve getallen getallen *gedefinieerd* in termen van natuurlijke getallen, dus niet *gepostuleerd* en komt de stelling dat minmaalmin plus is niet uit de lucht vallen. De behandeling die E. W. Beth ervan geeft is een goede leidraad, maar zij dient wel voor de genoemde doelgroep te worden vereenvoudigd. Laat ik een poging wagen!

We keren terug naar de natuurlijke getallen en doen alsof we niets meer dan natuurlijke getallen tot onze beschikking hebben. Het volgende model is weliswaar partieel, want alleen de getallen 0 tot en met 6 zijn gerepresenteerd, en ook antipartieel, want er is een doorgetrokken lijn tussen de 'meetstrepen' – wat suggereert dat er tussen twee natuurlijke getallen nog andere getallen voorkomen – maar de bedoeling is duidelijk:



Met de beschikbare natuurlijke getallen is een aftrekking als 4 – 3 wel, maar 3 – 4 niet mogelijk. Toch kunnen we zulke verschillen wel beschrijven; dat hebben we immers zojuist gedaan toen we '3 – 4' schreven.

Kunnen we aan '3 – 4' *betekenis* geven? Voorlopig nog niet, maar we kunnen wel een opmerkelijke vaststelling doen, namelijk daarmee 'gelijkwaardige' verschillen aangeven, bijvoorbeeld 2 – 3 en 5 – 6, om maar wat te noemen. Om dit plausibel te maken, schrijven we 3 – 4 als

$(3 - 3) - 1$, $2 - 3$ als $(2 - 2) - 1$ en dergelijke, want $3 - 3$ ging nog net, evenals $2 - 2$, en we komen zo tot de conclusie dat de verschillen die gelijkwaardig zijn met $3 - 4$ alle gelijkwaardig zijn met $0 - 1$.

We kunnen zelfs in een formule aangeven wanneer, algemeen, $a - b$ gelijkwaardig is met $0 - 1$, kijk maar:

als $b = a + 1$, dan is $a - b$ is gelijkwaardig met $0 - 1$

Opgave: ga dit na voor enkele zelf gekozen waarden van a en b.

Maar we hoeven ons niet te beperken tot $0 - 1$; met $0 - 2$, $0 - 3$, enz. moet het ook kunnen, algemeen:

als $b = a + d$, dan is $a - b$ is gelijkwaardig met $0 - d$

Opgave: ga dit na voor enkele zelf gekozen waarden van a, b, en d.

Het kan nog algemener; hier komt de conditie die net zoals alle volgende vet gedrukte clausules uit het hoofd moet worden geleerd:

$a - b$ is gelijkwaardig met $c - d$ als $a + d = b + c$

Bijvoorbeeld: $3 - 7$ is gelijkwaardig met $5 - 9$, want $3 + 9 = 7 + 5$

Opgave: geef meer van zulke voorbeelden.

In de voorbeelden tot nu toe was de waarde van b telkens groter dan die van a. Maar dat is niet nodig, het hele verhaal gaat ook op als de waarde van b kleiner of gelijk is aan die van a. Dus bijvoorbeeld: $9 - 4$ is gelijkwaardig met $7 - 2$, immers, $9 + 2 = 4 + 7$.

Opgave: geef ook zulke voorbeelden.

Nu is er iets speciaals aan de hand: als we alle verschillen die gelijkwaardig – de technische term is ‘equivalent’ – zijn met elkaar in één ‘pot’ doen – we spreken hier van een ‘equivalentieklasse’ – dan zijn alle equivalentieklassen die zo ontstaan volkomen verschillend van elkaar, dat wil zeggen zij hebben geen gemeenschappelijke ‘elementen’.

Dit is tamelijk ‘triviaal’, maar wiskundigen willen hiervoor een bewijs zien door aan te tonen dat

(1) $a - b$ is gelijkwaardig met $a - b$
(2) als $a - b$ gelijkwaardig is met $c - d$,
dan is $c - d$ gelijkwaardig met $a - b$

(3) als $a - b$ gelijkwaardig is met $c - d$
en $c - d$ is gelijkwaardig is met $e - f$,
dan is $a - b$ gelijkwaardig is met $e - f$

Opgave: bewijs (3)

Zo'n equivalentieklasse, dus alle gelijkwaardige elementen bij elkaar, duiden we nu aan door één element ervan als 'representant' te kiezen, en diens naam zetten we tussen de tekens [en]. We noemen nu elke equivalentieklasse van de vorm $[a - b]$ een geheel getal. Dus bijvoorbeeld [5 – 7] is een geheel getal, dat natuurlijk gelijk is aan [0 – 2], want dat is dezelfde klasse, en [7 – 5] is ook een geheel getal, dat gelijk is aan [2 – 0].

Opgave: geef meer van zulke voorbeelden.

Het lijkt misschien een wat ingewikkelde manier om gehele getallen aan te duiden, maar let wel, we maken hierbij alleen gebruik van natuurlijke getallen. Later gaan we wel over op een meer gebruikelijke notatie, maar zover zijn we nu nog niet. Eerst moeten we met gehele getallen leren rekenen!

Allereerst begrijpen we wanneer twee gehele getallen *gelijk* zijn, ofalgemeen, gebruikmakend van het 'gewone' =-teken:

$$[a - b] = [c - d] \text{ als } a + d = b + c$$

$a - b$ en $c - d$ zijn dan immers gelijkwaardig, dus ze behoren tot dezelfde klasse.

Dat we bij deze gehele getallen van 'groter dan' en 'kleiner dan' kunnen spreken, ligt voor de hand; ook hier handhaven we de gebruikelijke tekens:

$$[a - b] > [c - d] \text{ als } a + d > b + c$$

$$[a - b] < [c - d] \text{ als } a + d < b + c$$

We gaan hier niet verder op in, want het rekenen met gehele getallen wacht.

Allereerst de optelling. We geven de volgende definitie:

$$[a - b] + [c - d] = [(a + c) - (b + d]$$

Dus bijvoorbeeld:

[5 – 2] + [4 – 3] = [9 – 5]

$[5 - 2] + [3 - 4] = [8 - 6]$
$[2 - 5] + [4 - 3] = [6 - 8]$
$[2 - 5] + [3 - 4] = [5 - 9]$

> Opgave: herschrijf de bovenstaande optellingen door de representanten te vervangen door gelijkwaardige representanten van de vorm $[m - 0]$ of $[0 - n]$.
>
> Aanwijzing: $[6 - 5] + [1 - 4] = [7 - 9]$ is hetzelfde als
> $[1 - 0] + [0 - 3] = [0 - 2]$

Deze definitie van optellen van gehele getallen zorgt er voor dat de keuze van de representanten niet uitmaakt voor het resultaat van de optelling. We laten een bewijs hiervan achterwege.

Vervolgens de vermenigvuldiging. Daar is een definitie voor beschikbaar die meer toelichting vereist:

$$\mathbf{[a - b]\times[c - d] = [(ac + bd) - (ad + bc)]}$$

Allereerst wat voorbeelden en een opgave:

$[5 - 2]\times[4 - 3] = [26 - 23]$
$[5 - 2]\times[3 - 4] = [23 - 26]$
$[2 - 5]\times[4 - 3] = [23 - 26]$
$[2 - 5]\times[3 - 4] = [26 - 23]$

> Opgave: herschrijf de bovenstaande vermenigvuldigingen door de representanten te vervangen door gelijkwaardige representanten van de vorm $[m - 0]$ of $[0 - n]$.

Hoe is deze definitie gevonden? Heel eenvoudig, door formules voor representanten algebraïsch te behandelen zoals we gewend zijn, dat wil zeggen door $(a - b)$ met $(c - d)$ op de bekende manier te vermenigvuldigen en de uitkomst in de vorm $(x - y)$ te schrijven. Welnu,

$$(a - b)(c - d) = a(c - d) - b(c - d)$$

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

'dus'

$$(a - b)(c - d) = (ac + bd) - (ad + bc)$$

Dit rechtvaardigt de definitie natuurlijk nog niet. Maar als we kunnen aantonen dat het de enige definitie is waarbij de bestaande uitkomsten van vemenigvuldigingen van natuurlijke getallen behouden blijven, is het pleit beslecht.

Daarom gaan we de laatste gelijkheid afleiden voor natuurlijke getallen. We nemen aan dat a groter dan of gelijk is aan b, en c groter dan of gelijk is aan d, en stellen

$a - b = m$
$c - d = n$

zodat m en n beide groter dan of gelijk aan 0 zijn. Dan is

$a = m + b$ en $c = n + d$

Dus, met de producten in alfabetische volgorde, krijgen we stap voor stap, rekening houdend met het feit dat $(a - b)$ en $(a - b)$ groter dan of gelijk aan 0 zijn

$ac = (m + b)(n + d)$
$ac = mn + dm + bn + bd$
$ac = mn + d(a - b) + b(c - d) + bd$
$ac = mn + ad - bd + bc - bd + bd$
$ac = mn + ad + bc - bd$
$ac + bd = mn + ad + bc$
$mn + ad + bc = ac + bd$
$mn + (ad + bc) = (ac + bd)$

mn is groter dan of gelijk aan 0, dus $(ad + bc)$ is kleiner dan $(ac + bd)$, zodat

$mn = (ac + bd) - (ad + bc)$

met andere woorden

$(a - b) (c - d) = (ac + bd) - (ad + bc)$

Hiermee is de kous alleen nog nog niet af. Omdat de bestaande eigenschappen van natuurlijke getallen behouden moeten blijven, moet nog worden aangetoond dat vermenigvuldigingen van gehele getallen voldoen aan de bekende eigenschappen, zoals

$[a - b] \times [c - d] = [c - d] \times [a - b]$
$([a - b] \times [c - d]) \times [e - f] = [a - b] \times ([c - d] \times [e - f])$
$[a - b] \times ([c - d] + [e - f]) = [a - b] \times [c - d] + [a - b] \times [e - f]$

Opgave: toon de juistheid van de derde formule aan.

Bovendien worden – en dat komt goed uit! – aftrekkingen van gehele getallen onbeperkt mogelijk. Dit kan worden aangetoond door het volgende te bewijzen:

Bij elk paar gehele getallen $[a - b]$ en $[c - d]$
is er precies één geheel getal $[x - y]$, zodat

$$[a - b] + [x - y] = [c - d]$$

Opgave: laat zien dat $[x - y] = [(b + c) - (a + d)]$ een oplossing is van deze vergelijking.

Om te laten zien dat dit er precies één oplossing is, kan men aantonen dat uit $[a - b] + [x - y] = [c - d]$ en $[a - b] + [u - v] = [c - d]$ volgt dat $[x - y] = [u - v]$.

We schrijven nu:

$$[c - d] - [a - b] = [(b + c) - (a + d)]$$

of ook

$$\mathbf{[a - b] - [c - d] = [(a + d) - (b + c)]}$$

Voorbeeld:

$[2 - 3] - [1 - 6] = [8 - 4]$, of ook $[2 - 3] - [1 - 6] = [4 - 0]$

Opgave: kies zelf andere waarden voor a, b, c, en d en neem ook in de uitkomst van de aftrekking een representant van de vorm $n - 0$ of $0 - m$. Doe dit verschillende keren.

Het werken met equivalentieklassen in deze vorm, dus het gebruik van teksthaken, [en], is natuurlijk omslachtig. Vandaar dat we een andere schrijfwijze voor gehele getallen invoeren. Om de gedachten te bepalen: in plaats van $[3 - 0]$ schrijven we $+3$, en in plaats van $[0 - 3]$ schrijven we -3.

Algemeen:

als $a > b$, dan schrijven we $+(a - b)$ voor $[a - b]$, waarbij we $(a - b)$ herleiden tot een getal dat groter is dan 0,

als $a = b$, dan schrijven we 0 voor [a – b],
als $a < b$, dan schrijven we -(a – b) voor [a – b], waarbij we (a – b) herleiden tot een getal dat groter is dan 0.

Voorbeelden:

In plaats van [2 – 3] + [1 – 6] = [3 – 9] schrijven we -1 + -5 = -6,
en plaats van [2 – 3] – [1 – 6] = [8 – 4] schrijven we -1 – -5 = +4

> Opgave: geef zelf meer van zulke voorbeelden.
>
> Opmerking: als je, zoals gebruikelijk is, spaties om het optel- en om het aftrekteken zet, en breng je, zoals het hoort, geen spatie aan tussen het ‘plusteken’ en het ‘minteken’ (-) in getalsaanduidingen zoals +4 en -6, dan hoef je voor het plusteken en het optelteken geen verschil te maken, en hetzelfde geldt voor het minteken en het aftrekteken.

Tot slot keren we terug naar de vermenigvuldiging. We gaven de volgende voorbeelden:

[5 – 2]×[4 – 3] = [26 – 23]
[5 – 2]×[3 – 4] = [23 – 26]
[2 – 5]×[4 – 3] = [23 – 26]
[2 – 5]×[3 – 4] = [26 – 23]

Nu willen we ook die voorbeelden herschrijven in de ‘nieuwe’ notatie. We vervangen daarbij het ×-teken door een wat hoger geplaatste duidelijke stip • zonder spaties er om heen. Het eerste van deze vier voorbeelden, [5 – 2]×[4 – 3] = [26 – 23], wordt dan +3•+1 = +3

> Opgave: herschrijf zo ook de andere drie voorbeelden. Denk er om dat er om het =-teken wel spaties staan!

Hiermee eindigt de ‘rechtvaardiging’ van de minmaalminisplusregel. We kunnen nu met een gerust hart opgaven als -7•-8 tot een goed einde brengen, door ‘klakkeloos’ deze regel toe te passen op ‘negatieve getallen’, dat wil zeggen getallen die genoteerd worden met behulp van een cijfer waar een minteken aan voorafgaat. We hoeven alleen gebruik maken van het feit dat we geen moeite hebben met vermenigvuldigingen van ‘positieve getallen’, dat zijn getallen die officieel genoteerd worden met behulp van een cijfer waar een plusteken aan voorafgaat. Maar dit teken wordt in de praktijk weggelaten, als er geen onduidelijkheid over bestaat, zoals bijvoorbeeld in 3•2 = 6, 3•-2 = -6, -3•2 = -6, -3•-2 = 6.

Laatste opgave: geef meer van zulke voorbeelden. Let op de spaties!

Literatuur

Beth, E. W., *Wijsbegeerte der wiskunde*. Tweede, geheel opnieuw bewerkte uitgave. Antwerpen: Standaardboekhandel, 1948