

## E. W. BETH ALS WETENSCHAPSFILOSOOF (AANKONDIGING)

Nu 'E.W. Beth als logicus' zo uitgebreid door Paul van Ulsen in zijn dissertatie is behandeld, is 'E.W. Beth als wetenschapsfilosoof' aan de beurt. Dit is geen slag in de lucht: Beth's wetenschapsfilosofische werk omvat meer dan 15 artikelen, waaronder zijn vernieuwende verhandelingen over de semantiek van fysische theorieën (1948, 1949 en 1960), een boek (*Natuurphilosophie*, 1948) en circa 25 voordrachten. Het zou dan ook wel heel verwonderlijk zijn als zo'n groot denker geen originele gedachten zou hebben gehad over wetenschapsfilosofische onderwerpen. Is het bovendien niet opvallend dat Beth aan zijn hoofdwerk *The Foundations of Mathematics* de ondertitel *A Study in the Philosophy of Science* meegaf?

Dat Beth ook als wetenschapsfilosoof het bestuderen waard is, zal worden gedemonstreerd aan de hand van voorbeelden uit gepubliceerd en ongepubliceerd werk, met inbegrip van zijn 'systematische inleiding in de wetenschappelijke wijsbegeerte' *Natuur en Geest*, brieven en relatief onbekende bijdragen aan discussies op symposia zoals de conferentie over wetenschapsfilosofische problemen (*Problèmes de Philosophie des Sciences*, Brussel 1947). Geheel volgens de verwachtingen blonk Beth ook hier uit in precieze formuleringen en onderscheidingen die ondersteund worden door goed gekozen voorbeelden uit de geschiedenis van de wetenschap. Zijn kennis van de theoretische natuurkunde – Beth studeerde bij H. A. Kramers – en zijn bekendheid met 'klassieken der exacte wetenschappen' en historische studies – waaronder die van zijn vader H. J. E. Beth – maken dat de beschuldiging van oppervlakkigheid, die echte fysici nogal eens aan wetenschapsfilosofen richten, niet op hem van toepassing is.

## E. W. BETH AS A PHILOSOPHER OF SCIENCE (ANNOUNCEMENT)

With Paul van Ulsen's dissertation *E.W. Beth as a logician*, Beth's contributions to logic have already been treated in great detail. What still has to be done, is a thorough study of E. W. Beth as a philosopher of science. When we bear in mind that Beth's contribution to this subject comprises more than fifteen articles, including his epoch-

making papers on the semantics of physical theories (1948, 1949, and 1960), a book (*Natuurphilosophie*) and about 25 lectures, it is not far-fetched to suppose that such an eminent thinker had original thoughts on the philosophy of science too. (It is not accidental that the subtitle of *The Foundations of Mathematics* is *A Study in the Philosophy of Science*.) This will be demonstrated with examples from unpublished manuscripts, including Beth's *Natuur en Geest*, letters, and relatively unknown contributions to discussions at symposia such as the conference on problems of the philosophy of the sciences (Brussels, 1947). It will appear that Beth excelled in precise formulations and systematizations, which he illustrated and supported with the help of well-chosen examples from the history of science. His knowledge of physics – Beth studied with H. A. Kramers – and his acquaintance with classical scientific works and historical studies – including those of his father, H. J. E. Beth – guarantee that the accusation of superficiality in philosophy of science does not apply to him.

## E. W. BETH ALS WETENSCHAPSFILOSOOF

### Inleiding

Alleen al het feit dat Beth aan zijn *magnum opus*, het boek *The Foundations of Mathematics*, de ondertitel *A Study in the Philosophy of Science* meegaf, zou iemand aan het denken kunnen zetten: zag Beth zichzelf misschien meer als wetenschapsfilosoof dan als logicus? Mijn antwoord op deze vraag is bevestigend, maar het vereist wel enige toelichting. Beth zag zichzelf namelijk niet als een wetenschapsfilosoof à la Kuhn en Lakatos, integendeel: het werk van dit soort auteurs zou hij waarschijnlijk als onwetenschappelijk van de hand hebben gewezen. Nu de – vanuit Beths standpunt onbegrijpelijke – aandacht voor deze genoemde auteurs gelukkig verstomd is, wordt het des te interessanter om na te gaan welke taken Beth dan wel voor wetenschapsfilosofen weggelegd zag. Misschien helpt het sommige hedendaagse wetenschapsfilosofen uit het moeras van oppervlakkigheid te geraken.

Zoals bekend was Beth een voorstander van wat hij noemde *wetenschappelijke wijsbegeerte*. Bij deze uitdrukking denken we al

gauw aan Reichenbachs boek *The Rise of Scientific Philosophy* en dat is niet geheel ten onrechte, maar dit terzijde. Niet voor niets dacht Beth aan een Nederlandse vertaling van dit werk, net zoals hij eerder Tarski's *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences* in het Nederlands had bewerkt.<sup>1</sup> Iets anders: bij wetenschappelijke wijsbegeerte denken we misschien niet meteen aan Poppers befaamde boek *The Open Society and its Enemies*, maar dit bevatte volgens Beth ook wetenschappelijk filosofische bijdragen. Over dat andere beroemde werk van Popper, *Logik der Forschung* of *The Logic of Scientific Discovery* heeft Beth zich merkwaardig genoeg nauwelijks uitgelaten.

De kwestie is dat Beth aan 'wetenschappelijke wijsbegeerte' een tweeledige taak toekende, namelijk aan de ene kant *wetenschapsfilosofie* en aan de andere kant *levensfilosofie*. Het laatste mag vreemd klinken, maar Beth's bedoeling was hierbij dat de wetenschappelijke wijsbegeerte ook de 'bouwstoffen' moest leveren voor een 'wetenschappelijk aanvaardbare levensbeschouwing'.<sup>2</sup> 'De wetenschapsfilosofie houdt zich bezig met die wijsgerige problemen die hun oorsprong ontleen aan de wetenschap', zo luidt een eerste algemene omschrijving die Beth in een voordracht in Gent gaf.<sup>3</sup> Een tweede formulering is dat de wetenschappelijke wijsbegeerte als wetenschapsfilosofie 'de grondslagen van de verschillende wetenschapsgebieden [moet] verhelderen',<sup>4</sup> een formulering die Beth met opzet koos, om aan te geven dat wetenschapsfilosofie volgens hem een voortzetting is van de klassieke systeem-filosofische bestudering van de 'beginselen' van de diverse wetenschappen. Inderdaad een voortzetting, maar met andere middelen: de belangrijkste drie methoden van wetenschappelijke wijsbegeerte in het algemeen zijn namelijk:

- (1) de logische analyse,
- (2) de informele analyse,
- (3) de ideeëngeschiedenis.

Meer nog, bij de studie van de beginselen van een wetenschap onderscheidt de wetenschapsfilosofie zich uitdrukkelijk van

---

<sup>1</sup> Tarski (1953).

<sup>2</sup> Beth (1961a), p. 2.

<sup>3</sup> Idem.

<sup>4</sup> Ibidem, p. 7.

traditionele benaderingen doordat het zogenaamde *evidentiepostulaat* als ‘onwetenschappelijk’ wordt afgewezen.

Ter toelichting: het evidentiepostulaat houdt in dat ‘iedere wetenschap behoort uit te gaan van bepaalde onherleidbare beginselen, die vanzelf spreken en niet vatbaar zijn voor herziening’. De voorbeelden zijn bekend: filosofen geloofden dat zij zulke evidente principes hadden gevonden in *de wetten van de logica*, *de axioma’s van de meetkunde* en *het causaliteitsprincipe*. Maar deze overtuigingen zijn weerlegd door wetenschappelijk onderzoek, die tot meerdere logica’s en meerdere meetkonden leidden en aanleiding gaven tot natuurkundige theorieën waarin interpretaties van verschijnselen in termen van ‘causale ketens’ soms onmogelijk zijn.

Als logicus wist Beth natuurlijk maar al te goed dat de logica van een taal berust op de voor die taal kenmerkende syntactische en semantische regels, en hieruit vloeit al een relativering van de logica in het algemeen voort. Als kenner van de wetenschapsgeschiedenis besefte Beth dat ‘op verschillende tijden en in verschillende wetenschappen volgens tamelijk uiteenlopende logische regels is en wordt geredeneerd’ zodat een relativering van de logica van kunsttalen onontkoombaar is.<sup>5</sup>

Door zijn studie van de natuurkunde begreep Beth dat de nieuwere theorieën op zijn minst aanleiding geven tot een herziening van het klassieke causaliteitsprincipe.

De relativiteit van de meetkunde lijkt een simpel feit sinds, zeg Lobatchewsky. Daarmee is echter nog niet verklaard waarom de axioma’s van de Euclidische meetkunde zo intuïtief duidelijk zijn. En waarom mogen we er dan geen ‘absolute zekerheid’ voor opeisen, die niet door empirische gegevens kan worden geëlimineerd? Dit is een vraag die door Beth in zijn *Wijsgerige ruimteleer* het liefst beantwoord zag door toepassing van vormen van informele analyse, die hij als ‘psychologisch-signifische methoden’ karakteriseerde.<sup>6</sup>

Het is verleidelijk om lang stil te staan bij het probleem van de afbakening van wetenschappelijk *wijsgerig* onderzoek en ‘gewoon’, niet-filosofisch wetenschappelijk onderzoek. Het is duidelijk dat in de wetenschapsfilosofie volgens Beth de methode van logische analyse het *gebruik* van logica vereist, terwijl de ontwikkeling van logische theorieën zelf geen wetenschapsfilosofische activiteit is. Niettemin beschouwde Beth onderzoek naar de *grondslagen* van de logica weer

---

<sup>5</sup> Beth (1946), p. 115.

<sup>6</sup> Beth (1950), p. 127.

wel als een filosofische bezigheid. Het onderscheid tussen een wetenschap en grondslagen van die wetenschap is dus cruciaal om wetenschappelijke *wijsbegeerte* tot een onderzoeksgebied met een eigen karakter te maken. Niettemin blijven er vragen over, zoals: is een wetenschappelijk filosoof aan de ene kant vrijer in de zin dat hij ook een algemene kennistheorie dient te ontwikkelen en wanneer wordt axiomatisering van een wetenschappelijke theorie een wijsgerige activiteit?

Om met de laatste vraag te beginnen: Beth noemde ooit het werk van Huntington, Veblen en Young op het gebied van de axiomatica van wiskundige theorieën als behorend tot de ‘historische achtergrond’ van de ‘formele richting’ of ‘formalistische stroming’<sup>7</sup> in de analytische wijsbegeerte van de wetenschap. Kennelijk gaat het er om waarom iemand zich met axiomatisering bezighoudt. Gaat het alleen om kwesties van consistentie, categoriciteit en onafhankelijkheid van axiomasystemen, dan is men geneigd dit als een louter wetenschappelijke taakstelling te beschouwen. Zoekt men naar een axiomatisering die tegemoetkomt aan bepaalde beargumenteerde opvattingen over de grondslagen van een theorie, dan betreedt men het gebied van de wetenschappelijke wijsbegeerte. In die zin doen Veblen en Young dat niet en Heyting dat wel in hun respectievelijke axiomatische behandelingen van de projectieve meetkunde, hoe ‘formalistisch’ het proefschrift van de laatste ook is.<sup>8</sup> Het gaat dan in mijn terminologie om een *formele ontologische reconstructie* van een bestaande theorie, teneinde aan bepaalde kennistheoretische desiderata te voldoen.<sup>9</sup> Russells reconstructie van tijdsmomenten in termen van waarneembare gebeurtenissen is hiervan een vroeg voorbeeld.<sup>10</sup> Heyting had een vergelijkbaar doel: de opbouw van de projectieve meetkunde ‘in overeenstemming te brengen met de intuïtionistische opvatting der wiskunde’.<sup>11</sup> Omdat zowel Russell als Heyting inderdaad kennistheoretische argumenten aanvoerden, is hiermee ook een antwoord op de eerste vraag gegeven: ja, een wetenschappelijk filosoof is vrijer dan een ‘gewone’ wiskundige grondslagenonderzoeker.

Van latere datum is de formulering die Beth gaf aan grondslagenonderzoek van de natuurkunde: in zijn

---

<sup>7</sup> Beth (1956b), p. 3.

<sup>8</sup> Veblen and Young (1910); Heyting (1925).

<sup>9</sup> Visser (1987).

<sup>10</sup> Russell (1914).

<sup>11</sup> Heyting (1925), p. 1.

*Natuurphilosophie* omschrijft hij de *filosofische* taak als in het bijzonder *de syntactische en semantische analyse van de natuurwetenschappelijke theorieën*.<sup>12</sup> Let wel, ‘theorieën’ – meervoud – want ook de logische analyse van een theorie die allang verlaten is kan wetenschapsfilosofisch relevant zijn. Tussen twee haakjes: dit maakt tevens duidelijk waarom Beth niet bijster gelukkig zou zijn geweest met de latere Popper, of Kuhn en Lakatos en hun volgelingen: deze wetenschapsfilosofen spraken wel met veel aplomb over natuurkundige theorieën uit het verleden, maar met de logische analyse ervan hielden zij zich helaas niet bezig, terwijl hun historische behandelingen zeer veel te wensen overlaten. Er wordt met groot geschut gewerkt en met termen als ‘groei van kennis’, ‘paradigma’, ‘crisis’ en ‘onderzoekprogramma’ gesmeten, terwijl nauwgezette bestudering van relevante historische documenten achterwege blijft. Het voorbeeld van Duhem – met zijn studies over Leonardo da Vinci en dergelijke werken – en Dijksterhuis – met zijn *Val en Worp. Een bijdrage tot de Geschiedenis der Mechanica van Aristoteles tot Newton* is door de genoemde generalisten niet gevolgd. Wie deze studies kent, begrijpt waarom Beth niet zo gecharmeerd was van ‘vulgariserende litteratuur’ over de geschiedenis van de natuurkunde: er wordt ‘bij het groote publiek ten onrechte de indruk gevestigd van een in werkelijkheid niet aanwezige discontinuïteit in de ontwikkeling van de natuurwetenschap, ook de veranderingen in de natuurwetenschappelijke theorieën worden in de regel grooter voorgesteld dan ze in werkelijkheid zijn. Het is niet waar, dat het gehele gebouw van de natuurkunde telkens opnieuw met de grond gelijk wordt gemaakt.’<sup>13</sup>

Naast *logische* analyse noemde Beth *informele* analyse als wetenschapsfilosofische methode. Het waarom ervan is duidelijk: grondslagenproblemen worden ‘zeer vaak met behulp van de omgangstaal geformuleerd’.<sup>14</sup> De wetenschapsfilosoof dient zulke problemen kennelijk te interpreteren. Er staan hem daarbij volgens Beth verschillende methoden ter beschikking: de eerder genoemde *significa*, *semiotiek*, *retorica*, *socio-psycho-linguïstiek* en *linguïstische analyse*. Dat is nogal wat, maar waar het kennelijk om gaat, is dat zulke methoden het doel van *verheldering* van de grondslagen of althans cruciale spreekwijzen van een bepaald wetenschapsgebied

---

<sup>12</sup> Beth (1948b), p. 60.

<sup>13</sup> Beth (1945), p. 125.

<sup>14</sup> Beth (1961a), p. 8.

dienen. De informele analyses van dispositietermen en irrealissen – *counterfactuals* – door Roderick Chisholm en Nelson Goodman uit het jaren 1946 zijn hiervan een bekend voorbeeld.<sup>15</sup> Overigens kon Beth tien jaar later al wijzen op het bestaan van *logische* analyses van deze problemen.<sup>16</sup>

Het is natuurlijk weer de vraag in hoeverre de genoemde methoden van informele analyse wel ‘wetenschappelijk’ kunnen worden genoemd, of – als zij expliciet als wetenschappelijke methoden worden gepresenteerd, zoals in het geval van de *significa* – wel als ‘wijsgerig’ kunnen worden beschouwd, maar zoveel is zeker dat zij evenals de methode van logische analyse in het algemeen niet in het betreffende wetenschapsgebied worden toegepast.<sup>17</sup> Dit geldt zeer zeker ook voor de ideeëngeschiedenis. Zodoende komt er een taakverdeling tussen wetenschappelijke onderzoekers en wetenschapsfilosofen tot stand. Overigens hoeven wetenschapsfilosofen zich niet te beperken tot één vakgebied en kunnen zij ook meer algemene grondslagenproblemen aan de orde stellen.<sup>18</sup>

Tot nu toe is met zoveel woorden Beths wetenschapsfilosofische programma geschetst. Het wordt nu tijd om achtereenvolgens enkele van Beths bijdragen te bestuderen op elk van de genoemde gebieden, *de logische analyse, de informele analyse en de ideeëngeschiedenis*. Overigens heeft Beth ook algemene wetenschapssystematische beschouwingen geleverd. Die zal ik niet behandelen, hoe gezond Beths ideeën op dit punt ook waren. Ik beperk mij tot zijn wetenschappelijk-wijsgerige bijdragen, hoewel op een gegeven moment een uitstapje naar Beths kennistheorie nodig is.

## Logische analyse

Eigenlijk is het misleidend om van Beths wetenschapsfilosofische *programma* te spreken, want al voordat Beth zijn denkbeelden daarover uitte, had hij voor de natuurkunde al delen van dit programma uitgevoerd, met name in zijn *Natuurphilosophie* van 1948. Dit boek is nog steeds voorbeeldig voor wat een wetenschappelijk filosoof kan bereiken als hij logische,

---

<sup>15</sup> Chisholm (1946), Goodman (1947).

<sup>16</sup> Beth (1956b), p. 4.

<sup>17</sup> Beth (1961b), p. 2.

<sup>18</sup> Idem.

wetenschappelijke en historische inzichten combineert om de logische structuur van een natuurwetenschappelijke theorie te doorgronden. Er is ooit opgemerkt dat Beth hier in de beste traditie van Ernst Mach te werk is gegaan en vanzelfsprekend kende hij diens hoofdwerk *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*. Er is zelfs een merkwaardige parallel tussen Beths *Natuurphilosophie* en dit boek, als we het vierde hoofdstuk daarvan, ‘Die formelle Entwicklung der Mechanik’, vergelijken met het vijfde hoofdstuk van Beths boek, ‘De logische structuur der quantumtheorie’, en het laatste hoofdstuk van Machs boek, ‘Beziehungen der Mechanik zu andern Wissensgebieten’ met het laatste hoofdstuk van *Natuurphilosophie*, ‘de verhouding van de anorganische natuurwetenschap tot andere wetenschappen’. Het grote verschil is natuurlijk dat Beth echte logische middelen aanwendde, terwijl Mach alleen mathematische middelen tot zijn beschikking had. Overigens was Beth niet de eerste die Machs programma ‘met logische middelen voortzette’: Johann von Neumann, Paulette Février en met name Martin Strauss moeten vóór hem genoemd worden. Vergelijking tussen hun werk van de jaren dertig van de vorige eeuw met Beths werk zou kunnen aantonen hoe groot de vooruitgang was die Beth geboekt heeft, maar ik beperk me hier tot het noemen van zijn uitgebreide voorbeeld van de door Beth gereconstrueerde deductieregels die kenmerkend zijn voor de quantumtheorie, het Compton-effect:

Een bundel evenwijdige electromagnetische stralen passeert een ruimte, waarin zich vrije electronen bevinden. De stralen worden nu niet alleen verstrooid, maar bovendien verandert hun frequentie. Hoe meer een straal afwijkt van zijn oorspronkelijke richting, hoe meer zijn frequentie vermindert.

Beth noemde dit een ‘geschikt voorbeeld’ en hij nam aan dat daarvoor geen ‘meerdere natuurkundige kennis’ werd verondersteld, dan toen op een HBS of Gymnasium kon worden verkregen.<sup>19</sup> Het is de vraag of dat zo is, maar het roept wel de principiële vraag op waar een wetenschappelijk filosoof die zich aan de logische analyse van een theorie wil wagen, zijn kennis van zaken op dat gebied vandaan moet halen. Is middelbare schoolkennis werkelijk al voldoende? Beth voelde misschien al nattigheid toen hij in zijn Voorwoord een typisch

---

<sup>19</sup> Beth (1948a), p. 8.



leerboek voor ‘eerstejaars studenten en belangstellenden van hetzelfde peil’ aanbeval, *Grondbeginselen van de hedendaagse natuurkunde* van J. A. Prins, het bekende ‘blauwe boekje’.<sup>20</sup> Of voelde hij zichzelf aangesproken door wat Prins in zijn voorbericht schreef:

Op zes fenomenologische hoofdstukken volgen zes op atomistische basis, waarbij de menging van klassieke en quantumtheoretische voorstellingen wel eens logische troebelen moet geven. De hiermee verbonden zielestrijd kan echter ook gezien worden als een onvermijdelijke fase, die aan ruimer begrip bij verdere studie voorafgaat.<sup>21</sup>

Waarom koos Beth het Compton-effect als voorbeeld? Kort komt het erop neer dat de wisselwerking tussen foton en elektron zowel quantummechanisch als klassiek corpusculair kan worden behandeld, terwijl beide behandelingen op dezelfde frequentie uitkomen. Beths logische analyse kan dit, omdat hij om te beginnen ‘complementaire’ en ‘niet-complementaire’ *bouwstenen* – dat zijn bepaalde elementaire formules – onderscheidt en vervolgens het begrip ‘afleidbaar’ definieert voor niet-complementaire uitdrukkingen. Daarmee is hij in staat uit de onderling niet-complementaire premissen van een Compton-opstelling met één foton en één enkel electron conclusies af te leiden. Welnu, door deze premissen in termen van de klassieke corpusculaire theorie als precondities van een elastische botsing te beschouwen, kan Beth dezelfde conclusies bereiken. In het algemeen geldt inderdaad:

Het essentiële punt van verschil tussen de newtoniaanse en de quantumtheoretische logica is hierin gelegen, dat de laatste alleen deductie uit onderling niet-complementaire praemissen toestaat. Gaat nu echter een newtoniaanse redenering toevalligerwijs van niet-complementaire praemissen uit, dan zal het mogelijk zijn, deze redenering in de quantummechanica ongewijzigd of althans vrijwel ongewijzigd te reproduceren. Dit geval doet zich nu juist voor bij de discussie van het Compton-effect.<sup>22</sup>

---

<sup>20</sup> Prins (1939).

<sup>21</sup> Prins (1963), p. 1. Aangenomen wordt dat deze passage al voorkomt in Prins (1939).

<sup>22</sup> Beth (1948a), p. 121.

Welke verheldering levert Beths logische analyse nu eigenlijk op?  
Laten we weer Beth zelf aan het woord:

De klassieke corpusculaire theorie en de klassieke undulatoire theorie in haar geheel zijn onderling strijdig. Zonderen we echter uit deze beide theorieën die redeneringen af, die uitgaan van onderling niet-complementaire praemissen, dan blijken deze redeneringen niet langer onderling tegenstrijdig te zijn. De exacte quantumtheorie nu laat van den beginne af slechts deze redeneringen toe en vat de toelaatbare ‘corpusculaire’ en ‘undulatoire’ redeneringen tot één gesloten systeem samen.<sup>23</sup>

De vraag hoe men kan uitmaken of een gegeven stel premissen niet-complementair is, werd door Beth beantwoord in termen van de onbepaaldheidsrelaties van Heisenberg. Ik vermeld dit speciaal, omdat Beth niet de pretentie had zelf een bijdrage te leveren aan de natuurkunde. Zo baseerde hij zich ook uitdrukkelijk op het *complementariteitbeginsel* van Bohr. Wel achtte hij het de taak van een wetenschappelijk filosoof wetenschappelijke theorieën te *interpreteren*. D.w.z. het is in zijn geval niet voldoende om voor natuurkundige theorieën vormregels, deductieregels en semantische regels op te stellen die uitsluitend betrekking hebben op de ‘bouwstenen’, er dient met name nog een *empirische interpretatie* van de gereconstrueerde theorie te worden vastgelegd. Hiervoor moeten verbanden worden gelegd tussen uitdrukkingen van de theorie in kwestie en empirische uitspraken. Dit gebeurt in de vorm van nieuwe semantische regels, die bijvoorbeeld de volgende vorm hebben:

De uitdrukking “ $P_k$ ” van de theorie  $T$  is in overeenstemming met de empirie, als  $\epsilon_k$ .<sup>24</sup>

In zijn *Natuurphilosophie* gaf Beth alleen twee voorbeelden van zulke semantische regels in een interpretatie van de klassieke natuurkunde:

- a) De uitdrukking ‘in het ruimtedeel  $R$  bevindt zich gedurende het tijdvak  $T$  een homogeen gravitatieveld van sterkte  $g$ ’ is *in overeenstemming met de empirie*, als gedurende dat tijdvak

---

<sup>23</sup> Idem.

<sup>24</sup> Beth (1948a), p. 155.

elke fysieke slinger in die ruimte in zijn evenwichtsstand overall dezelfde richting aanneemt, en als hij om die evenwichtsstand slingeren uitvoert met slingertijd

$$\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$$

- b) De uitdrukking ‘in het ruimtedeel  $R$  bevindt zich gedurende het tijdvak  $T$  een homogeen gravitatieveld van sterkte  $g$ ’ is *in strijd met de empirie*, als een aanmerkelijk aantal fysieke slingers gedurende dat tijdvak
- α) hetzij geen evenwichtsstand bezit;
  - β) hetzij in de evenwichtsstand merkbaar verschillende richtingen aanneemt;
  - γ) hetzij om de evenwichtsstand slingeren uitvoert, welke slingertijd  $\tau$  aanmerkelijk afwijkt van  $2\pi$ .<sup>25</sup>

Deze regels worden hier bewust volledig geciteerd, om het verschil met naïeve voorbeelden van het kaliber ‘Alle zwanen zijn wit’ te beklemtonen. Want Beth is nu in staat om typisch wetenschapsfilosofische discussies *op een hoog niveau* te voeren, ook al is de uitvoering van het programma van de interpretatie van ‘de’ natuurkunde, nog niet echt gestart. Zo schrijft hij bijvoorbeeld:

Het systeem van de semantische regels is een zeer gecompliceerde deductieve theorie, die we het best als *theorie van de natuurkundige meting* kunnen aanduiden. De opbouw van deze theorie vooronderstelt de opbouw van de natuurkundige theorieën in engere zin. Bij de opbouw van een theorie van de natuurkundige meting zal met voordeel een zekere hiërarchische volgorde in acht worden genomen. Men zal b.v. beginnen met de interpretatie van de meetkunde, daarop de interpretatie van de mechanica laten volgen, om daarna achtereenvolgens de interpretatie van de warmteleer, de optiek en de theorie van electriciteit en magnetisme te ontwikkelen.

Afgeleide regels zullen ons dan in staat stellen, b.v. meetkundige stellingen met optische hulpmiddelen, stellingen van de mechanica en de warmteleer met elektrische hulpmiddelen te toetsen, enz.<sup>26</sup>

---

<sup>25</sup> Beth (1948a), p. 162.

<sup>26</sup> Beth (1948a), p. 163.

Later ‘actueel geworden’ onderwerpen van de verbale wetenschapsfilosofie, zoals het vraagstuk van de incommensuralibiteit van theorieën, kunnen ook in dit licht worden beschouwd. Bijvoorbeeld:

Om de onderlinge verhouding van twee verschillende theorieën over een zelfde onderwerp – het klassieke voorbeeld leveren nog altijd de optische theorieën van Fresnel en Neumann – te kunnen beoordelen, moet men vooral ook op de interpretatie van die theorieën letten: doet men dit, dan blijken vaak theorieën, die op het eerste geacht onderling strijdig lijken, zeer goed verenigbaar te zijn. In dergelijke gevallen worden dus de tegenstrijdig lijkende elementen bij de interpretatie geëlimineerd. Dergelijke elementen worden (...) [door sommige auteurs] als *overbodig* aangeduid. Zonder twijfel zijn ze ook in vele gevallen als overbodig aan te merken. Dit behoeft echter niet noodzakelijk het geval te zijn. Het is zeer goed denkbaar, dat op een element van een theorie bij de deductie binnen deze theorie geen beroep behoeft te worden gedaan, en dat het ook niet optreedt bij de uiteindelijke interpretatie van de theorie, terwijl het toch ook niet als overbodig kan worden beschouwd; het is immers denkbaar, dat dit element nodig is ter verkrijging van de interpretatie, ook al komt het in haar uiteindelijk resultaat niet voor.<sup>27</sup>

En ook:

Is een theorie in strijd met de empirie, dan behoeft dit nog niet aan de theorie zelf te liggen; de oorzaak kan ook liggen bij de interpretatie.<sup>28</sup>

Waar het om gaat, is dat uitdrukkingen ‘in strijd met de empirie’ en ‘interpretatie’ bij Beth een precieze betekenis hebben gekregen. Wat een verschil met de verbale wetenschapsfilosofen!

Over incommensurabiliteit gesproken, de traditionele behandelingen van twee of meer verschillende concurrerende theorieën spreken altijd van een zogenaamd *experimentum crucis*.

---

<sup>27</sup> Beth (1948a), p. 163-164.

<sup>28</sup> Beth (1948a), p. 164.

Het probleem hierbij is dat zo'n beslissend experiment voor de aanhangers van elk van deze theorieën acceptabel moet zijn. Beth heeft dit probleem besproken in een fraaie voordracht over 'Methodologie der empirische wetenschappen'. Daarbij wees hij er op, dat zo'n situatie pas het geval is in een ver ontwikkelde fase van de empirische wetenschap in kwestie. Hij voerde toen 'een beschaafde chinees' ten tonele die 'onze natuurwetenschap niet kent' en daarom geen verstrekkende conclusies kan trekken uit de slingerproef van Foucault:

Hij zal helemaal niet begrijpen dat men van de uitslag van deze proef zo verschrikkelijk veel werk maakt. Het heeft alleen deze betekenis indien men deze hele voorgeschiedenis en de hele theorie die daaraan vastzit kent.<sup>29</sup>

Hier toont Beth zich weer een volgeling van Ernst Mach: kennis van de historische ontwikkeling van de natuurkunde is onontbeerlijk voor wie de huidige theorieën wil begrijpen. Wetenschapsfilosofen die dit ontkennen of zulke kennis zelf niet eens hebben, kunnen mooi praten over incommensurabiliteit van theorieën in het algemeen, maar daar koop je niets voor.

Bij zijn beschouwingen over 'interpretatie' van de klassieke natuurkunde had Beth wel de nodige historische achtergrondkennis in het achterhoofd. Hetzelfde geldt voor zijn bespreking van mogelijke interpretaties van de quantumtheorie. Dat het complementariteitbeginsel van Bohr en de onbepaaldheidsrelaties e. d. van Heisenberg hier weer een centrale rol spelen behoeft geen betoog. Beth maakte daar gebruik van in zijn logische analyse van de Einstein-Podolsky-Rosenparadox.<sup>30</sup>

Beths aanvaarding van het complementariteitbeginsel heeft echter nog een voor de wetenschappelijke wijsbegeerte belangrijke consequentie. Het leidt namelijk direct tot 'logisch relativisme', of – in de woorden van Beth – de erkenning van 'de relativiteit van de logica':

De eliminatie van de (...) gevolgtrekkingen uit de corpusculaire theorie [die in strijd zijn met de undulatietheorie en die door experimenten worden weerlegd] komt nl. niet tot stand door de

---

<sup>29</sup> Beth (1955), p. 9.

<sup>30</sup> Beth (1949), p. 183 en Beth (1960), p. 173.

weglating van een of meer der voor deze theorie kenmerkende grondhypothesen. Ze wordt verkregen door een beperking in de mogelijkheid, uit deze grondhypothesen gevolgtrekkingen af te leiden, d.w.z., door een verzwakking van de logica (...).<sup>31</sup>

Wat is hier het geval? Beths eigen commentaar laat aan duidelijkheid niets te wensen over:

Een ingrijpende wijziging in de logische wetten, en dan nog wel, niet krachtens een aprioristisch inzicht, maar naar aanleiding van de resultaten van empirisch onderzoek, was wel het laatste, wat men tot voor kort mogelijk zou hebben gehouden.<sup>32</sup>

Eerlijkheidshalve moet worden opgemerkt dat Beth toch genuanceerd dacht over aprioristische inzichten. Volgens hem kon het ‘aprioristisch’ karakter van de driedimensionaliteit van de ‘wereldruimte’ wel ‘zonder ernstig bezwaar’ worden aangenomen.<sup>33</sup> Wat dit inhoudt, dient een informele analyse duidelijk te maken. Het heeft dus zin enige aandacht te besteden aan deze wetenschappelijk wijsgerige methode.

### Informele analyse

Beth was natuurlijk de man van de logische analyse en hij was geen groot voorstander van de manier van informele analytische filosofie zoals die op een gegeven moment in Engeland werd bedreven. Hij ergerde zich duidelijk aan de logicafobie van sommige analytische filosofen en stelde daar tegenover dat ‘de formele en de informele logica, de geformaliseerde talen, de algemeen-technische verkeerstaal (...) nu eenmaal niet gescheiden naast elkaar [staan], ze vullen elkaar aan en werken op elkaar in.’<sup>34</sup> Toch zal het duidelijk zijn dat als er door een informele analyse al voldoende helderheid is verkregen, dat dan een formeel vervolg niet strikt noodzakelijk meer is. Dit geldt bijvoorbeeld voor de analyse van een paradox als die van Berry, die uitgaat van de volgende volzin:

---

<sup>31</sup> Beth (1948b), p. 14, vergelijk p. 12.

<sup>32</sup> Idem.

<sup>33</sup> Beth (1950), p. 125.

<sup>34</sup> Beth (1961c), p. 230.

*Het getal van Berry is het kleinste natuurlijke getal dat niet gedefinieerd kan worden met behulp van een volzin bestaande uit ten hoogste 50 woorden of symbolen die alle aan ons vocabularium moeten zijn ontleend.<sup>35</sup>*

Maar al sinds zijn proefschrift was Beth geïnteresseerd in de zgn. 'subjectieve fundering van de wiskunde' en meende hij de bouwstenen daarvoor te kunnen vinden in een psychologisch-signifische analyse van het wiskundige denkproces. Wat dat betreft is hij ooit sterk door Mannoury beïnvloed. De problemen waar het hier met name om gaat, betreffen de 'aanschouwelijke evidentie' die sommige wiskundige resultaten schijnen te hebben. Bekend is het voorbeeld van Russell van de som van de eerste 1, 2, 3 en 4 derde machten 1, 8, 27 en 64, dus 1, 9, 36 en 100, waar iedereen onmiddellijk de kwadraten van 1, 3, 6 en 10 in herkent, en het weinig moeite meer kost om algemeen de som van de eerste  $n$  derde machten gelijk te stellen aan de kwadraten van de som van de eerste  $n$  natuurlijke getallen. Verder is er de zogenaamde 'ruimtelijke intuïtie' die er volgens Beth voor zorgde dat Euclides nooit tot foutieve meetkundige stellingen kwam, ondanks het feit dat hij zo'n gebrekkige axiomatic had.<sup>36</sup> En dan is er ook nog de befaamde intuïtie van grote natuurkundigen waar Ernst Mach het ook al uitvoerig over heeft gehad. Kortom, we hebben hier een wetenschapsfilosofisch probleem van de eerste orde. De analyse van zulke verschijnselen behoort dus ook tot de wetenschappelijke filosofie, maar het is duidelijk dat er hier geen sprake is van een informele logische analyse van beweringen zoals in het geval van de paradox van Berry. Het gaat hier om psychologisch onderzoek, zelfs in de zin van Locke, dus met expliciete gebruikmaking van introspectie.

Beth was geen wetenschappelijk filosoof die daar zomaar mee aan de slag ging. Hij wist ook wel dat introspectie in sommige wetenschappelijke kringen verdacht was en daarom kon hij een rechtvaardiging van deze methode niet achterwege laten. Welnu, hierbij kon hij uitstekend gebruik maken van de analogie van het eerder genoemde complementariteitprincipe om naast de natuurwetenschappen ook de zgn. 'geesteswetenschappen' te kunnen erkennen. Beide hebben een gebied waarop ze bij wijze van spreken

---

<sup>35</sup> Beth (1967), p. 83.

<sup>36</sup> Beth & Piaget (1961), p. 111.

autonoom te werk kunnen gaan. Zo mag men in de geesteswetenschappelijke psychologie voor verklaringen van gedrag van mensen uitgaan van de toelichtingen die de personen er zelf van geven.<sup>37</sup> En precies dat is het wat Beth doet in zijn psychologische beschouwingen van het wiskundig denken. Zijn uitgangspunt daarbij was Brouwers karakterisering van het wiskundige denken, die door Beth gegeneraliseerd wordt als hij 'de analytische functie van het bewustzijn' als 'een der meest wezenlijke kenmerken van het menselijk intellect' noemt. Het zou te ver voeren om hier Beths algemene kennistheorie uiteen te zetten, maar in het kort komt het hier op neer dat Beth met Kant verschillende 'synthetische' functies van de menselijke geest erkent:

Iedere aanschouwing omvat een veelheid van indrukken, die echter nimmer als zoodanig tot bewustzijn zou kunnen komen, wanneer onze geest niet in staat was, de *volgorde* van die indrukken te onderscheiden. De indrukken van één enkel oogenblik immers vormen voor de voorstelling een volstrekte eenheid. Zal evenwel de veelheid van indrukken, die ontstaat door de onderscheiding in den tijd, in de *aanschouwing* tot een veeleenheid kunnen samenvloeien, dan is het noodig, dat de geest deze veelheid van indrukken doorloopt en samenvat. Deze samenvattende functie van den geest duidt Kant aan als *synthese der apprehensie*.<sup>38</sup>

U ziet, Beth kende zijn klassieken. Van Kant nam hij ook de *synthese der reproductie* en de *synthese der recognitie* over. Weliswaar onttrekken deze functies zich aan de introspectie, maar men kan tot hun 'bestaan' besluiten op grond van het resultaat van die functies. Aldus Beth, die vervolgens opmerkte 'dat wij de in onze geest tot stand gebrachte synthese achteraf weer te niet kunnen doen, en deze *analyse* is wel toegankelijk voor introspectief onderzoek'. Deze analytische functie treedt met name in werking als de normale gang van synthetische apperceptie onderbroken wordt. Dit kan op twee manieren voorkomen, door storingen van buitenaf, of wanneer die onderbreking door ons zelf wordt teweeggebracht. Ik beperk mij tot het tweede geval, dat Beth illustreerde met het voorbeeld van een

---

<sup>37</sup> Beth (1945), p. 145.

<sup>38</sup> Beth (1948c), p. 313.



melodie. Bij het aanhoren ervan kunnen wij onze aandacht vestigen op een of ander detail.

Ogenschijnlijk zijn we nu nog ver verwijderd van het wiskundige denken. Maar niet volgens Beth, die het volgende opmerkte:

in dit geval hebben we tevens een voorbeeld van den door Brouwer op den voorgrond gestelden willekeurigen overgang van den toestand van het *verdroomen* naar die van de *wiskundige beschouwing*.<sup>39</sup>

Typisch, deze verwijzing naar Brouwer. Maar nu concreet: wat heeft dit te maken met het probleem van de intuïtie?

Een begin van het antwoord op deze vraag gaf Beth in het boek dat hij samen met Piaget schreef. Hij zocht met zoveel woorden naar noties en principes die regelrecht uit de genoemde analytische functie gedestilleerd kunnen worden, zoals de deel-geheelrelatie en het axioma, dat een deel van een deel ook een deel van het origineel is. Het idee is dus dat de intuïtieve wiskundige inzichten geleid worden door zulke primitieve noties en principes die kennelijk ten grondslag liggen aan bepaalde wiskundige theorieën zoals de Euclidische meetkunde en de theorie der natuurlijke getallen. Het probleem dat de intuïtieve inzichten zo vaak juist blijken te zijn, ontstaat wanneer de traditionele axiomatiseringen en de bewijsvoeringen die op grond daarvan kunnen worden uitgevoerd niet uitgaan van die primitieve noties en principes. Axiomatiseringen die dat wel doen, zouden dus zeer wenselijk zijn. Dit doet denken aan de eerder genoemde reconstructies van Russell en Heyting. Alleen heeft Beth hier niet zelf meer een bijdrage aan kunnen leveren.

In feite is dit nog maar de helft van het verhaal. Wat ontbreekt zijn informele analyses van intuïtief gevonden wiskundige probleemoplossingen waaruit meer concrete primitieve principes en procedures naar boven komen. Beth is ook hier niet meer aan toe gekomen, maar het is u misschien bekend dat hier iemand voor u staat die dit programma wel probeert uit te voeren. Dat is ook de reden waarom ik dieper op dit aspect van Beths filosofie ben ingegaan.

---

<sup>39</sup> Beth (1948c), p. 314.

## Ideeëngeschiedenis

Het belang van ideeëngeschiedenis voor de wetenschapsfilosofie is in het voorgaande al aan de orde geweest. Het is gemakkelijk praten in termen van paradigma's, revoluties, crisissen, onderzoeksprogramma's, probleemverschuivingen en daarbij wat voorbeelden te zoeken die de vage veronderstellingen zouden ondersteunen, maar erg wetenschappelijk is dat allemaal niet. Beth heeft zich daar verre van gehouden; hij was van mening dat er een wetenschapsgeschiedenis à la Duhem en Dijksterhuis nodig is voordat men bijvoorbeeld überhaupt een notie als crisis zinnig kan gebruiken. Dit voorbeeld is welbewust gekozen: Beth was bereid 'crisissen' in de geschiedenis van de natuurkunde te onderkennen, maar niet nadat hij een 'terugblik op oudere systemen' had gegeven en op grond van zijn gecombineerde ideeënhistorische en logisch-analytische behandeling een 'crisis' van een wetenschap had gekarakteriseerd als 'de wijziging van haar logische syntaxis'. Dit was namelijk volgens Beth 'de meest ingrijpende verandering die een wetenschap kan ondergaan'.<sup>40</sup>

Helemaal origineel werk heeft Beth hiervoor niet verricht: hij kon voortbouwen op de historische studies van de genoemde Duhem en Dijksterhuis, alsmede van die van Hoenen en Brunet. De conclusie die Beth bereikte was dat de natuurkunde in meer dan twintig eeuwen pas driemaal een crisis in de gedefinieerde zin heeft doorgemaakt: voor de eerste maal bij de uitbreiding door Aristoteles van de eleatische logica tot de aristotelische logica, vervolgens bij de langzame verdringing van de aristotelische logica door de newtoniaanse logica en voor de derde maal bij de intrede van de quantumlogica.

Wat Aristoteles betreft had Beth zelf wel het nodige werk verricht in het boek waarvan nog niet zo lang geleden tijdens het Beth Symposium in Nancy door Paul Weingartner en Christian Thiel werd gezegd dat het nu eindelijk eens in het Engels zou moeten worden vertaald: *De wijsbegeerte der wiskunde van Parmenides tot Bolzano*.

Dit boek is inderdaad exemplarisch voor Beths opvattingen over hoe ideeëngeschiedenis wetenschappelijk wijsgerig zou moeten worden beoefend. Zijn principiële uitgangspunt was natuurlijk dat oude denkbeelden in het licht van nieuwere inzichten moeten worden bekeken. Op grond hiervan kon hij uitspraken doen over de logische syntaxis van systemen uit de tijd dat nog niemand van logische

---

<sup>40</sup> Beth (1948a), p.153.

syntaxis had gehoord. Maar Beth gaf ook aan waarom hij dat uitgangspunt had gekozen:

ten eerste is ons vermogen, de oude denkbeelden met behulp van de tegenwoordig gangbare terminologie te interpreteren, de beste maatstaf voor ons begrip ervan; ten tweede doet een voortdurende confrontatie met moderne inzichten het eigenaardige in de oudere opvattingen des te duidelijker uitkomen.<sup>41</sup>

Hier lijkt mij wetenschappelijk wijsgerig niets tegen in te brengen. Het gaat hier altijd om een *terugblik* waarbij het doel van verheldering voorop staat. Wat dat betreft toonde Beth zich weer een goede leerling van Ernst Mach die bijvoorbeeld al bij zijn bespreking van Galilei met differentie- en differentiaalquotienten aankomt.<sup>42</sup>

Als laatste voorbeeld wil ik daarom kort op enkele elementen van Beths bespreking van Leibniz' ideeën over de infinitesimaalrekening wijzen. Zoals bekend was de aanpak van de wiskundigen ten tijde van Leibniz en nog lang daarna niet bijster exact. Symbolen die eerst niet het getal 0 voorstellen, doen dan later wel. Hier werd, zoals bekend, kritiek op geleverd door Berkeley, overigens pas na de dood van Leibniz en Newton. Vanuit een hedendaags standpunt was deze kritiek terecht en dat mag best gezegd worden. En we kunnen er ook vrede mee hebben als Beth opmerkt dat hij Leibniz' fundering van zijn resultaten met behulp van zijn *continuïteitsprincipe* 'veeleer de toepasselijkheid van de infinitesimaalrekening op de verschijnselen waarborgt dan de wiskundige juistheid van deze theorie'.<sup>43</sup> Aan de andere kant noemt hij een opmerking van Leibniz dat zijn stijl alleen maar in de uitdrukkingen verschilt van die van Archimedes 'zeer juist'<sup>44</sup>. Ook beweert Beth dat Newton 'duidelijk blijkt te hebben ingezien', dat diens versie van de infinitesimaalrekening, de fluxierekening, 'niet op een solide grondslag berustte'.<sup>45</sup> In ander verband noemde Beth Leibniz' bewijspogingen 'niet geslaagd' en zo zijn er meer opmerkingen die een evaluatie van het werk van wetenschappelijke onderzoekers uit het verleden inhouden.

---

<sup>41</sup> Beth (1944), p.6.

<sup>42</sup> Mach (1908), p. 145.

<sup>43</sup> Beth (1944), p. 135.

<sup>44</sup> Beth (1944), p. 62.

<sup>45</sup> Beth (1944), p. 135.

Aan het begin heb ik de vraag gesteld naar de afbakening van wetenschappelijke wijsbegeerte en gewoon wetenschappelijk onderzoek. Nu blijkt dat Beth zich ook vrijheden permitteerde in de ideeëngeschiedenis. Wellicht overschreed Beth hier de grenzen van de wetenschappelijke wijsbegeerte en is het niet terecht als een wetenschapsfilosoof op grond van wat hij nu weet kritiek levert op grondslagenonderzoekers die nog niet over die kennis beschikten. Maar dat is slechts een kleine kanttekening bij het indrukwekkende werk van Beth als wetenschapsfilosoof.

## Literatuur

Beth, E. W. (1944), *De wijsbegeerte der wiskunde van Parmenides tot Bolzano*. Antwerpen: Standaardboekhandel.

Beth, E. W. (1945), *Natuur en geest*. Manuscript [409].<sup>46</sup>

Beth, E. W. (1948a), *Natuurphilosophie*. Gorinchem: Noorduijn.

Beth, E. W. (1948b), De wetenschap als cultuurfactor. In: *De functie der wetenschap*. 's-Gravenhage: H.P. Leopold, 1948.

Beth, E. W. (1948c), *Wijsbegeerte der wiskunde*. Tweede geheel opnieuw bewerkte uitgave. Antwerpen: Standaardboekhandel.

Beth, E.W. (1949), Towards an up-to-date philosophy of the natural sciences. *Methodos*, 1.

Beth, E. W. (1950), *Wijsgerige ruimteleer*. Antwerpen: Standaardboekhandel.

Beth, E. W. (1956a), Syllabus hedendaagse analyse van de wetenschap. Manuscript. [705]

Beth, E. W. (1956b), Hedendaagse analyse van de wetenschap. Manuscript. [705].

---

<sup>46</sup> Het getal tussen teksthaken verwijst naar het overeenkomstige nummer in Velthuis-Bechtold (1995).

- Beth, E. W. (1960), Semantics of physical theories. *Synthese*, 12.
- Beth, E. W. (1961a), Wijsbegeerte als wetenschap. Deel I. Manuscript [728].
- Beth, E.W. (1961b), Wijsbegeerte als wetenschap. Deel II. Manuscript [728].
- Beth, E. W. (1961c), Opmerkingen over analytische wijsbegeerte. *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte en Psychologie*, 54.
- Beth E. W. & Piaget, J. (1961), *Epistemologie mathématique et psychologie. Essay sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Beth, E. W. (1967), *Moderne logica*. Assen: Van Gorcum & Comp.
- Chisholm, R. M. (1946), The contrary-to-fact conditional. *Mind*, 53.
- Goodman, N. (1947), The problem of counterfactual conditionals. *The Journal of Philosophy*, 44.
- Heyting, A. (1925), *Intuitionistische axiomatiek der projectieve meetkunde*. Groningen: P. Noordhoff.
- Mach, E. (1908), Prins, J. A. (1939), *Grondbeginselen van de hedendaagse natuurkunde*. Tweede druk. Groningen en Batavia: J.B. Wolters.
- Prins, J. A. (1963), *Grondbeginselen van de hedendaagse natuurkunde*. Tiende druk. Groningen: J.B. Wolters.
- Russell, B. (1914), *Our knowledge of the external world as a field for scientific philosophy*. Chicago and London: Open Court.
- Tarski, A. (1953), *Inleiding tot de logica en tot de methodenleer der deductieve wetenschappen*. Nederlandse bewerking door E.W. Beth. Amsterdam: Noord-Hollandsche Uitgevers Maatschappij.

Veblen, O. and Young, O. W. (1910), *Projective geometry*. Volume I. Boston: Ginn and Company.

Velthuys-Bechtold, P. J. M. (1995), *Inventory of the papers of Evert Willem Beth (1908-1964), philosopher, logician and mathematician*. Haarlem: Rijksarchief in Noord-Holland.

Visser, H. (1987), *Logical analysis and ontological reconstruction. Two programs in the analytic tradition*. Alblasserdam: Kanters.